Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уфимский государственный нефтяной технический университет»

Кафедра «Механика и конструирование машин»

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Учебно-методическое пособие
по выполнению контрольной работы по теоретической механике

УФА 2008

Учебно-методическое пособие составлено с учетом рабочих программ дисциплины «Теоретическая механика», преподаваемой студентам технических вузов. Оно поможет обучающимся закрепить теоретический материал и оценить свои знания по разделам теоретической механики «Кинематика точки. Кинематика твердого тела». Приведены примеры выполнения заданий, варианты заданий для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля.

Составители: Садыков В.А., профессор, канд. техн. наук,
Аглиуллин М.Х., доцент, канд. техн. наук,
Имаева Э.Ш., доцент, канд. техн. наук

Рецензент Загорский В.К., профессор, док. техн. наук

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью учебно-методического пособия по выполнению контрольной работы №1 является оказание методической помощи студентам, изучающим разделы «Кинематика точки. Кинематика твердого тела» в дисциплине «Теоретическая механика». Прикладные задачи этой темы применимы и в других разделах курса, а также в дисциплинах «Теория механизмов и машин», «Физика», «Детали машин», в ряде специальных дисциплин.

Контрольная работа №1 включает в себя три задачи:

- задача К1 «Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения»,
- задача К2 «Кинематический анализ плоского механизма»,
- задача К3 «Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки».

Номер варианта чертежа и исходных данных соответствует порядковому номеру студента в списке группы.

УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ РАБОТЫ

Контрольная работа выполняется на листах формата А4 в соответствии с ГОСТ 2.105-95. Поля очерчиваются рамкой (по ГОСТ 2.104), первый лист (с рамкой) – титульный (см. Приложение), все последующие листы (с рамкой) – с указанием порядкового номера страницы. Записи ведутся на лицевой стороне. Тыльная сторона – для замечаний и ответов при защите работы.

Выполнение работы начинается с записи исходных данных. В ходе решения задачи должен быть выполнен чертеж, на котором с учетом выбранного масштаба должны быть изображены все вектора скоростей и ускорений точек и проекции векторов на каждую из осей. Чертеж должен быть аккуратным, наглядным. Решение задачи необходимо сопровождать краткими разъяснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получены те или иные результаты), необходимо подробно излагать весь ход расчетов. В конце должны быть даны численные ответы.

В электронном варианте оформления контрольной работы допускается выполнение чертежа вручную с последующим его сканированием и вставкой в текстовый файл. Отпечатанный в MS Word (Open Office) текст может быть оформлен без соблюдения ГОСТ 2.104 (без рамок).

1 ЗАДАЧА К1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ ПО ЗАДАННЫМ УРАВНЕНИЯМ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

1.1 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧИ

Дано: уравнения движения точки $\boldsymbol{M}$

$$\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{t} \text{ см}, \ \boldsymbol{y} = 16\boldsymbol{t}^2 - 1 \text{ см}. \tag{1}$$

Необходимо установить вид траектории движения точки $\boldsymbol{M}$ и для момента времени $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_1 = 0{,}5$ с найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Решение. Уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время $\boldsymbol{t}$ из уравнений (1).

Получаем $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^2 - 1$, т.е. траекторией точки является парабола (рис. 1.1).

Вектор скорости точки

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_x \bar{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{v}_y \bar{\boldsymbol{j}}. \tag{2}$$

Вектор ускорения

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}_x \bar{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{a}_y \bar{\boldsymbol{j}}.$$

Здесь $\bar{\boldsymbol{i}}$, $\bar{\boldsymbol{j}}$ – орты осей $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$; $\boldsymbol{v}_x$, $\boldsymbol{v}_y$, $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ – проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (1),

$$\boldsymbol{v}_x = \dot{\boldsymbol{x}} = 4 \text{ см/с}; \ \boldsymbol{v}_y = \dot{\boldsymbol{y}} = 32\boldsymbol{t} \text{ см/с}; \ \boldsymbol{a}_x = \ddot{\boldsymbol{x}} = 0; \ \boldsymbol{a}_y = \ddot{\boldsymbol{y}} = 32 \text{ см/с}^2; \tag{3}$$

По найденным проекциям определяются модуль скорости

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\boldsymbol{v}_x^2 + \boldsymbol{v}_y^2} = 16{,}5 \text{ см/с} \tag{4}$$

и модуль ускорения точки

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{\boldsymbol{a}_x^2 + \boldsymbol{a}_y^2} = 32 \text{ см/с}^2 \tag{5}$$

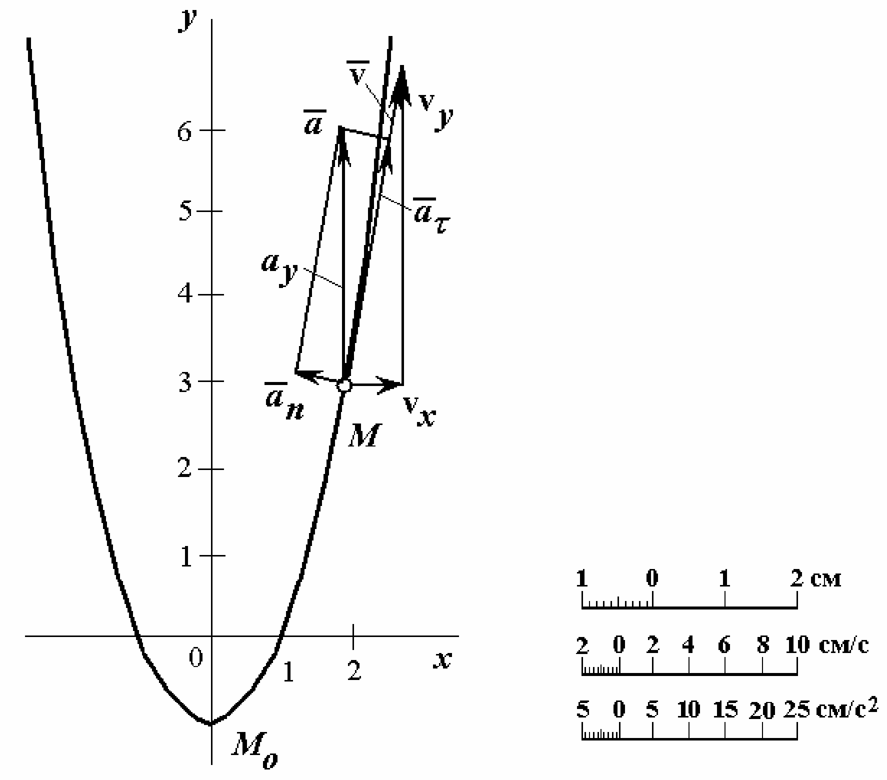


Рис. 1.1

Модуль касательного ускорения точки

$$\boldsymbol{a}_\tau = \left|\frac{dv}{dt}\right|, \tag{6}$$

или

$$\boldsymbol{a}_\tau = \left|\frac{\boldsymbol{v}_x \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{v}_y \boldsymbol{a}_y}{\boldsymbol{v}}\right|. \tag{7}$$

Здесь $\boldsymbol{dv}/\boldsymbol{dt}$ выражает проекцию ускорения точки на направление ее скорости. Знак «+» при $\boldsymbol{dv}/\boldsymbol{dt}$ означает, что движение точки ускоренное, направления $\bar{\boldsymbol{a}}_\tau$ и $\bar{\boldsymbol{v}}$ совпадают; знак «–» – что движение замедленное.

Модуль нормального ускорения точки

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{v}^2/\boldsymbol{\rho}. \tag{8}$$

Если радиус кривизны траектории $\boldsymbol{\rho}$ в рассматриваемой точке неизвестен, то $\boldsymbol{a}_n$ можно определить по формуле

$$\boldsymbol{a}_n = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{a}_\tau^2}\,. \tag{9}$$

При движении точки в плоскости формула (8) принимает вид

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{\left|\boldsymbol{v}_x \boldsymbol{a}_y - \boldsymbol{v}_y \boldsymbol{a}_x\right|}{\boldsymbol{v}} = 31 \text{ см/с}^2. \tag{10}$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$\boldsymbol{a_n} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{a}_\tau^2} = 7{,}8 \text{ см/с}^2. \qquad (11)$$

После того как найдено нормальное ускорение по формулам (8) или (9), радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{v}^2 / \boldsymbol{a_n}\,. \qquad (12)$$

Результаты вычислений по формулам (3) – (6), (9) и (12) для заданного момента времени $\boldsymbol{t}_1 = 0{,}5$ с приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с^2					Радиус кривизны, см
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
2	3	4	16	16,5	0	32	32	31	7,8	35

На рис. 1.1 показано положение точки $\boldsymbol{M}$ в заданный момент времени и векторы скорости и ускорений в выбранном масштабе. Вектор $\bar{\boldsymbol{v}}$ строим по составляющим $\boldsymbol{v}_x$ и $\boldsymbol{v}_y$, причем этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ строим по составляющим $\boldsymbol{a}_x$ и $\boldsymbol{a}_y$ и затем раскладываем на составляющие $\bar{\boldsymbol{a}}_\tau$ и $\bar{\boldsymbol{a}}_n$. Совпадение величин $\boldsymbol{a}_\tau$ и $\boldsymbol{a}_n$, найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.

1.2 ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

По заданным уравнениям движения точки $\boldsymbol{M}$ установить вид ее траектории и для момента времени $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для выполнения расчетно-графической работы данные приведены в таблице 1.2.

В данной задаче необходимо определить траекторию движения точки, скорость и ускорение точки. Ускорение определяется при координатном и естественном способах задания движения. Совпадение модулей и направлений векторов полных ускорений, найденных двумя способами, является проверкой правильности выполненной работы.

Таблица 1.2

Номер варианта	Уравнения движения		t_1, с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
1	$-\cos(\pi t^2/3)+4$	$\sin(\pi t^2/3)-1$	1
2	$-2t^2+3$	$-5t$	0,5
3	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3)-3$	1
4	$-3/(t+2)$	$3t+6$	2
5	$8\sin(\pi t^2/6)+3$	$2-8\cos(\pi t^2/6)$	1
6	$3t^2-t+1$	$5t^2-5t/3-2$	1
7	$7\sin^2(\pi t/6)-5$	$-7\cos^2(\pi t/6)$	1
8	$4t+4$	$-4/(t+1)$	2
9	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3)+4$	1
10	$3t^2+2$	$-4t$	0,5
11	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6)-3$	1
12	$-4t^2+1$	$-3t$	0,5
13	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	2
14	$2-3t-6t^2$	$3-3t/2-3t^2$	0
15	$4\cos^2(\pi t/3)+2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2+1$	1
17	$6\sin(\pi t^2/6)-2$	$6\cos(\pi t^2/6)+3$	1
18	$-2t-2$	$-2/(t+1)$	1
19	$5\cos(\pi t^2/3)$	$-5\sin(\pi t^2/3)$	1
20	$-6t$	$-2t^2-4$	1
21	$-4\cos(\pi t/3)-1$	$-4\sin(\pi t/3)$	1
22	$-5t^2-4$	$3t$	1
23	$1+3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3)+3$	1
24	$6t^2-2$	$4t$	0,25
25	$2\cos(\pi t^2/3)-2$	$-2\sin(\pi t^2/3)+3$	1
26	$-4t^2+1$	$-3t$	1
27	$8\cos^2(\pi t/6)+2$	$-8\sin^2(\pi t/6)-7$	1
28	$5t^2+5t/3-3$	$3t^2+t+3$	1
29	$-3-9\sin(\pi t^2/6)$	$-9\cos(\pi t^2/6)+5$	1
30	$6-6t^2+2$	$4-5t^2+5t/3$	1

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1 Чем является траектория точки при векторном способе задания движения точки?

2 Как по уравнениям движения точки в координатной форме определить ее траекторию?

3 Чему равен вектор скорости точки в данный момент времени и какое направление он имеет?

4 Как определяются проекции скорости точки на неподвижные оси декартовой системы координат?

5 Чему равен вектор ускорения точки и как он направлен по отношению к годографу скорости?

6 Как направлены естественные координатные оси в каждой точке кривой?

7 В какой плоскости расположено ускорение точки и чему равны его проекции на естественные координатные оси?

8 Что характеризуют собой касательное и нормальное ускорения точки?

9 Какова последовательность определения радиуса кривизны траектории точки?

10 Как классифицируются движения точки по ускорениям?

2 ЗАДАЧА К2

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

2.1 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пример 2.1.1

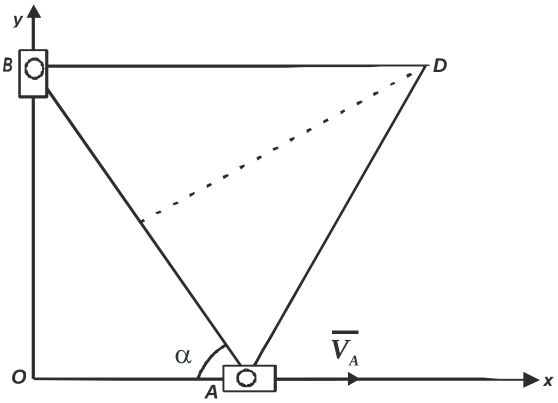


Рис. 2.1

Вершины $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ равностороннего треугольника $\boldsymbol{ABD}$ перемещаются соответственно по осям $\boldsymbol{Ox}$ и $\boldsymbol{Oy}$ (рис. 2.1). Известны $\boldsymbol{AB} = 40$ см, $\boldsymbol{v_A} = 4\sqrt{3}$ м/с, $\boldsymbol{a_A} = 100$ м/с^2, $\boldsymbol{\alpha} = 60°$. Определить скорости и ускорения точек $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ треугольника в заданном положении.

Решение.

1 Определение скоростей точек:

а) по теореме о скоростях точек в плоскопараллельном движении

$$\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{BA}}. \qquad (1)$$

Направление и величина скорости точки $\boldsymbol{A}$ известны, скорость точки $\boldsymbol{B}$ направлена вдоль оси $\boldsymbol{Oy}$, а скорость $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{BA}}$ перпендикулярна стороне $\boldsymbol{AB}$. Строим равенство (1) (рис. 2.2). Из точки $\boldsymbol{O_1}$ параллельно оси $\boldsymbol{Ox}$, вдоль которой движется точка $\boldsymbol{A}$, откладываем в масштабе вектор $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}}$. Из конца вектора $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}}$ проводим линию $\boldsymbol{MN}$ перпендикулярно стороне треугольника $\boldsymbol{AB}$ (60? с вертикалью), тогда пересечение линии $\boldsymbol{O_1K}$ параллельно оси $\boldsymbol{Oy}$ и $\boldsymbol{MN}$ обозначит вектор $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B}}$. Полученный треугольник скоростей соответствует формуле (1). Умножив масштаб на длины векторов, получим их величины.

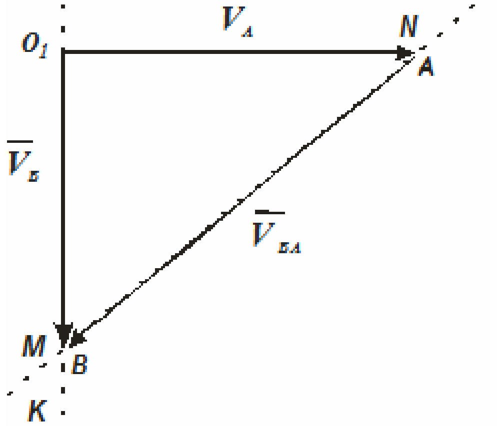


Рис. 2.2

Если рис. 2.2 строится без соблюдения масштаба, то определение величин скоростей производится с помощью теоремы синусов:

$$\frac{\boldsymbol{v_A}}{\sin 60°} = \frac{\boldsymbol{v_B}}{\sin 30°} = \frac{\boldsymbol{v_{BA}}}{\sin 90°},$$

$$\boldsymbol{v_B} = \boldsymbol{v_A} \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 60°} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = 4 \text{ м/с},$$

$$\boldsymbol{v_{BA}} = \boldsymbol{v_A} \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 60°} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}/2} = 8 \text{ м/с}.$$

Поскольку $\boldsymbol{v_{BA}} = \boldsymbol{\omega_{BA}} \cdot \boldsymbol{AB}$, то может быть определена угловая скорость вращения точки $\boldsymbol{B}$ вокруг $\boldsymbol{A}$ (или, что то же самое, угловая скорость вращения треугольника $\boldsymbol{ABD}$):

$$\boldsymbol{\omega}_{AB} = \boldsymbol{\omega_{ABD}} = \boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{v_{AB}}}{\boldsymbol{AB}} = \frac{8}{0{,}4} = 20 \text{ с}^{-1}.$$

В данном примере не известно направление скорости точки $\boldsymbol{D}$. Поэтому для определения скорости точки $\boldsymbol{D}$ запишем

$$\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{D}} = \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}} + \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{DA}}, \qquad (2)$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{D}} = \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B}} + \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{DB}}. \qquad (3)$$

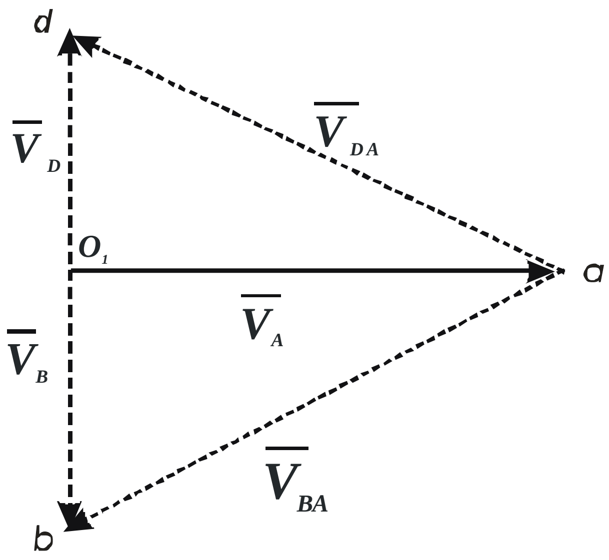


Рис. 2.3

Аналогично рис. 2.2 делаем построение для определения скорости точки $\boldsymbol{D}$ (рис. 2.3).

Линия $\boldsymbol{ad}$ перпендикулярна стороне треугольника $\boldsymbol{AD}$, $\boldsymbol{bd}$ перпендикулярна $\boldsymbol{BD}$. Точка $\boldsymbol{D}$ – точка пересечения линии $\boldsymbol{ad}$ и $\boldsymbol{bd}$ определяет конец вектора, проведенного из точки $\boldsymbol{O}_1$; отрезок $\boldsymbol{ad}$ соответствует вектору $\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{DA}}$, $\boldsymbol{bd}$ – вектору $\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{DB}}$. При известных углах можно определить величину скорости точки $\boldsymbol{D}$ – $\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{D}}$:

$$\frac{\boldsymbol{v}_D}{\sin 30°} = \frac{\boldsymbol{v_A}}{\sin 60°} = \frac{\boldsymbol{v_{DA}}}{\sin 90°},$$

$$\boldsymbol{v_D} = \boldsymbol{v_A} \cdot \frac{\sin 90°}{\sin 60°} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = 4 \text{ м/с}, \quad \boldsymbol{v_{DA}} = \boldsymbol{v_A} \cdot \frac{\sin 90°}{\sin 60°} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}/2} = 8 \text{ м/с};$$

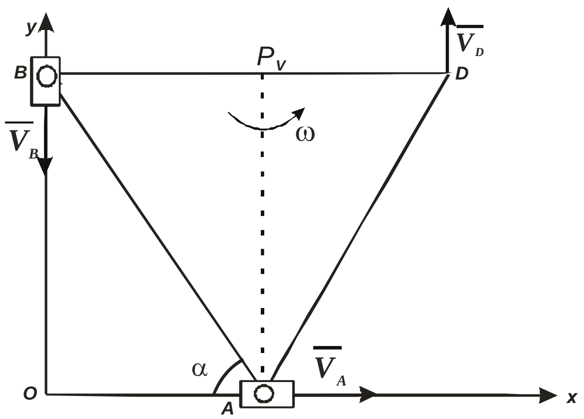


Рис. 2.4

б) определение скоростей точек с помощью мгновенного центра скоростей.

Мгновенный центр скоростей (МЦС) звена $\boldsymbol{AB}$ – $\boldsymbol{P_V}$ находится в точке пересечения перпендикуляров к скоростям точек (рис. 2.4) – ($\boldsymbol{AP_V} \perp \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}}$, $\boldsymbol{BP_V} \perp$ оси $\boldsymbol{Oy}$, вдоль которой направлена скорость точки $\boldsymbol{B}$), после нахождения МЦС – $\boldsymbol{P_V}$ можно написать соотношение

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{v_A}{AP_V} = \frac{\boldsymbol{v_P}}{\boldsymbol{BP_V}} = \frac{\boldsymbol{v_D}}{\boldsymbol{DP_V}}.$$

Направление вращения треугольника определяем по вращению точки $\boldsymbol{A}$ вокруг точки $\boldsymbol{P_V}$ (в данном случае против хода часовой стрелки).

Величина угловой скорости треугольника

$$\omega = \frac{v_A}{AP_V} = \frac{\boldsymbol{v_A}}{\boldsymbol{AB}\cdot\mathbf{cos}\,30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{0{,}4\cdot\sqrt{3}/2} = 20 \text{ с}^{-1}.$$

Далее определяем величины скоростей других точек

$$\boldsymbol{v_B} = \omega\cdot\boldsymbol{BP_V} = 20\cdot 0{,}2 = 4 \text{ м/с},$$

$$\boldsymbol{v_D} = \omega\cdot\boldsymbol{DP_V} = 20\cdot 0{,}2 = 4 \text{ м/с}.$$

Векторы скоростей перпендикулярны соответствующим отрезкам $\boldsymbol{BP_V}$ и $\boldsymbol{DP_V}$ и направлены в сторону вращения.

2 Определение ускорений точек *B* и *D*:

а) ускорение точки $\boldsymbol{B}$ определяется по формуле

$$\bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{B}} = \bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{A}} + \bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{BA}} \text{ или } \bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{B}} = \bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{A}} + \bar{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{ц}}_{\boldsymbol{BA}} + \bar{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{вр}}_{\boldsymbol{BA}}. \qquad (4)$$

Ускорение точки $\boldsymbol{A}$ задано, т.е. известно по величине и направлению; ускорение $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{ц}}_{\boldsymbol{AB}}$ направлено от точки $\boldsymbol{B}$ к точке $\boldsymbol{A}$ и вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{ц}}_{\boldsymbol{AB}} = \omega^2\cdot\boldsymbol{AB} = 20^2\cdot 0{,}4 = 160 \text{ м/с}^2.$$

Известно также, что вектор $\bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{B}}$ направлен вдоль оси $\boldsymbol{Oy}$, т.к. точка $\boldsymbol{B}$ движется вдоль этой оси, а вектор $\bar{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{вр}}_{\boldsymbol{AB}}$ направлен перпендикулярно линии $\boldsymbol{AB}$. С учетом сказанного можно построить эти векторы (рис. 2.5) или построить равенство (4) (рис. 2.6) и спроецировать его на выбранные оси координат $\boldsymbol{B_{X1}}$ и $\boldsymbol{B_{Y1}}$:

на ось $\boldsymbol{B_{X1}}$ $\boldsymbol{a_B}\cdot\mathbf{cos}\,30^\circ = \boldsymbol{a_A}\cdot\mathbf{cos}\,60^\circ + \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{ц}}_{\boldsymbol{BA}}\cdot\mathbf{cos}\,0^\circ + \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{вр}}_{\boldsymbol{BA}}\cdot\mathbf{cos}\,90^\circ$;

на ось $\boldsymbol{B_{Y1}}$ $\boldsymbol{a_B}\cdot\mathbf{cos}\,120^\circ = \boldsymbol{a_A}\cdot\mathbf{cos}\,30^\circ + \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{ц}}_{\boldsymbol{BA}}\cdot\mathbf{cos}\,90^\circ + \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{вр}}_{\boldsymbol{BA}}\cdot\mathbf{cos}\,180^\circ$;

или $\boldsymbol{a_B} = \dfrac{\boldsymbol{a_A}\cdot\mathbf{cos}\,60^\circ + \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{ц}}_{\boldsymbol{BA}}}{\mathbf{cos}\,30^\circ} = \dfrac{100\cdot 0{,}5 + 160}{0{,}866} = \dfrac{210}{0{,}866} = 242{,}5$ м/с^2;

$$a_{BA}^{ц} = \frac{a_A \cdot \cos 30^\circ + a_B}{1} = 100 \cdot 0{,}866 + 121 = 207{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Оба ускорения a_B и $a_{BA}^{вр}$ оказались положительными. Это значит, что предварительный выбор направления (рис. 2.5) оказался верным.

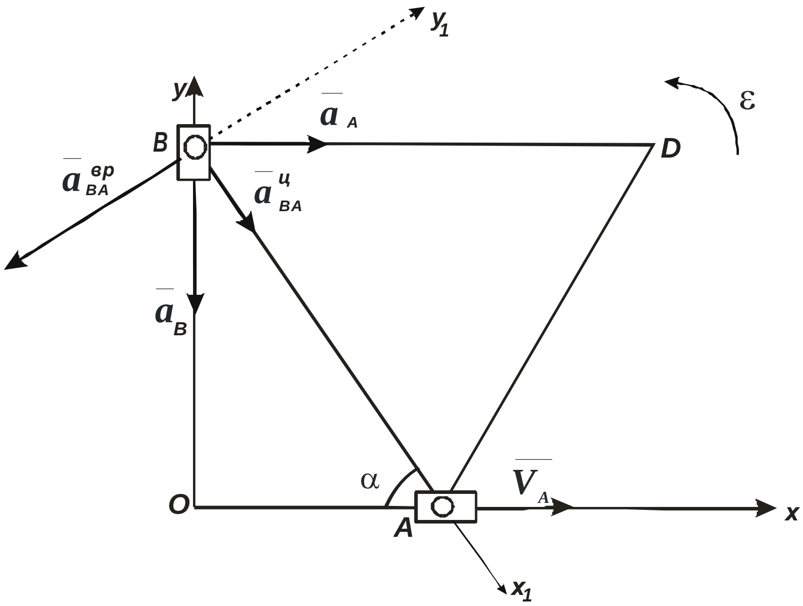


Рис. 2.5

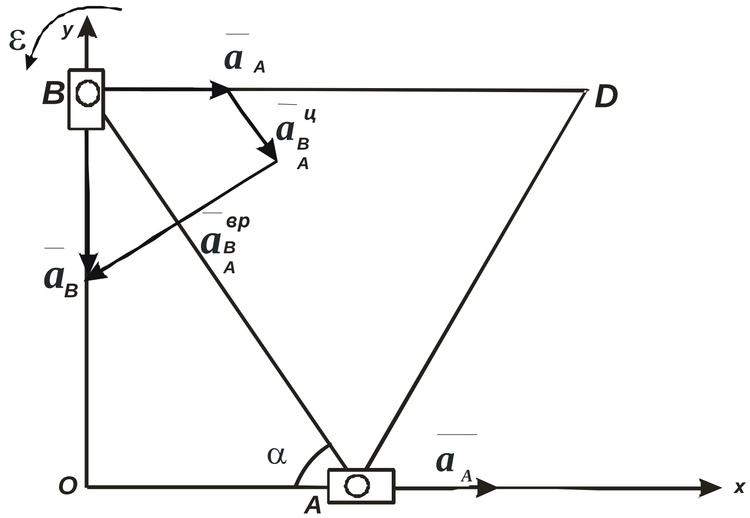


Рис. 2.6

Из формулы $a_{BA}^{вр} = \varepsilon \cdot AB$ можно определить угловое ускорение треугольника (или точки B при вращении вокруг точки A)

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^{вр}}{AB} = 5{,}19 \text{ с}^{-1}.$$

Направление углового ускорения определяется вектором $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{BA}}^{\boldsymbol{вр}}$. В данном примере видно, что точка B, вращаясь вокруг $\boldsymbol{A}$, ускоряется против хода часовой стрелки;

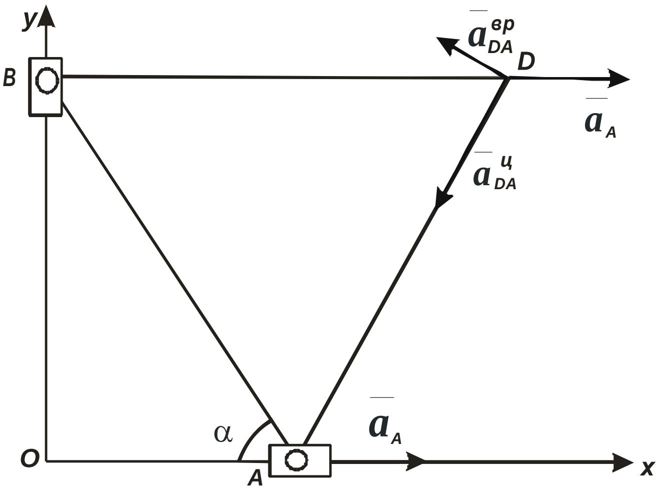


Рис. 2.7

б) ускорение точки $\boldsymbol{D}$ определяется по формуле (рис. 2.7)

$$\bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{D}} = \bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{DA}}^{\boldsymbol{ц}} + \bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{DA}}^{\boldsymbol{вр}}.$$

В этой формуле известно слагаемое правой части

$$a_{DA}^{ц} = \omega^2 \cdot DA = 20^2 \cdot 0{,}4 = 160 \text{ м/с}^2.$$

Этот вектор направлен от точки $\boldsymbol{D}$ к выбранному полюсу $\boldsymbol{A}$.

Вектор $\bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{DA}}^{\boldsymbol{вр}}$ перпендикулярен отрезку AD и направлен соответственно угловому ускорению ($\boldsymbol{\varepsilon}$) треугольника $\boldsymbol{ABD}$.

Так как и величина и направление ускорения точки $\boldsymbol{D}$ неизвестны, то векторное равенство (5) проецируем на выбранные оси координат ($\boldsymbol{Ox}$ и $\boldsymbol{Oy}$).

Получим

$$a_{Dx} = a_a - a_{DA}^{ц} \cdot \cos 60° - a_{DA}^{вр} \cdot \cos 30° = 100 - 160 \cdot \frac{1}{2} - 2{,}1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18{,}2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Dy} = a_A \cdot \cos 90° - a_{DA}^{ц} \cdot \cos 30° + a_{DA}^{вр} \cdot \cos 60° = 0 - 136 + 1{,}05 = -134{,}95 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение точки $\boldsymbol{D}$

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} = \sqrt{(18{,}2)^2 + (134{,}95)^2} = 136{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Направление ускорения точки $\boldsymbol{D}$ определяется с помощью направляющих косинусов:

$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}$ – косинус угла между осью $\boldsymbol{Ox}$ и вектором ускорения:

$$\cos\alpha = \frac{a_{Dx}}{a_D} = \frac{18{,}2}{136{,}2} = 0{,}1336, \quad \alpha = 82{,}22°$$

$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\beta}$ – косинус угла между осью $\boldsymbol{Oy}$ и вектором ускорения:

$$\cos\beta = \frac{a_{Dy}}{a_D} = \frac{134{,}95}{136{,}2} = 0{,}9908, \quad \beta = 7{,}78°.$$

Пример 2.1.2 Колесо *I* с радиусом *R* вращается вокруг оси, проходящей через центр колеса перпендикулярно плоскости чертежа с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega_I}$ и угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon_I}$. Независимо от него на той же оси вращается кривошип $\boldsymbol{OA}$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega_{OA}}$ и угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon_{OA}}$. Кривошип приводит в движение колесо *II* с радиусом $\boldsymbol{r}$, которое катится по колесу *I* (рис. 2.8).

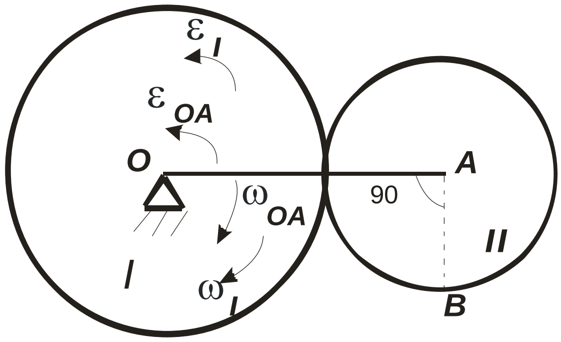


Рис. 2.8

Найти $\boldsymbol{v_B}$ и $\boldsymbol{a_B}$, если $\boldsymbol{R} = 20$, $\boldsymbol{r} = 10$ см, $\boldsymbol{\omega_I} = 5$ с$^{-2}$, $\boldsymbol{\varepsilon_I} = 1$ с$^{-2}$, $\boldsymbol{\omega_{OA}} = 3$ с$^{-2}$, $\boldsymbol{\varepsilon_{OA}} = 2$ с$^{-2}$.

Решение.

Колесо *I* и кривошип совершают вращательное движение, а колесо *II* – плоско-параллельное.

Найдем скорость точки $\boldsymbol{B}$, для этого определим положение мгновенного центра скоростей колеса *II*. Чтобы найти МЦС нужно знать направление скоростей хотя бы двух точек тела. Найдем скорость точки $\boldsymbol{A}$, которая принадлежит колесу *II* и кривошипу $\boldsymbol{OA}$:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = \omega_{OA} \cdot (R + r) = 3 \cdot (20 + 10) = 90 \quad \text{см/с}.$$

Вектор $\boldsymbol{\bar{v}_A}$ направлен перпендикулярно отрезку $\boldsymbol{OA}$ в сторону вращения кривошипа (рис. 2.9).

В точке соприкосновения колес скорость точки колеса *II* должна равняться скорости точки колеса *I*. Обозначим эту точку буквой *D*. Эта точка не принадлежит кривошипу *OA*. Так как движение колеса *I* известно, можно найти скорость точки *D*.

$$V_D = \omega_I \cdot R = 5 \cdot 10 = 100 \quad \text{см/с}.$$

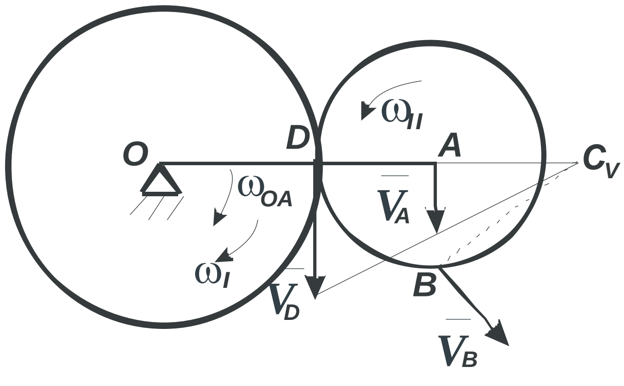


Рис. 2.9

Вектор скорости точки $\boldsymbol{D}$ направлен перпендикулярно радиусу *OD* в сторону вращения колеса *I*. Таким образом, нам известны скорости двух точек колеса *II*. Проведем перпендикуляр к скоростям в точках *A* и *D* и прямую, проходящую через концы векторов скоростей $\boldsymbol{\bar{v}_D}$ и $\boldsymbol{\bar{v}_A}$.

В точке пересечения этих линий и будет МЦС для колеса *II*. Обозначим его буквой C_V. Найдем расстояние AC_V:

$$\omega_{II} = \frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_D}{DC_V} = \frac{V_D}{AC_V + r};$$

$$V_A\left(AC_V + r\right) = V_D AC_V\,;$$

$$AC_V\left(V_D - V_A\right) = V_A r = \omega \cdot AC_V r\,;$$

$$AC_V = \frac{V_A r}{V_D - V_A} = \frac{90 \cdot 10}{100 - 90} = 90 \text{ см.}$$

тогда $\omega_{II} = \dfrac{V_A}{AC_V} = \dfrac{90}{90} = 1$ с$^{-1}$ или $\omega_{II} = \dfrac{V_D - V_A}{r}$ с$^{-1}$.

Зная угловую скорость колеса *II* и его МЦС, найдем скорость точки $\boldsymbol{B}$

$$V_B = \omega_{II} BC_V = \omega_{II}\sqrt{AC_V^2 + r^2} = 1\sqrt{90^2 + 10^2} = 90{,}55 \text{ см/с.}$$

Вектор $\overline{V}_B$ направлен перпендикулярно отрезку BC_V в сторону вращения колеса *II*.

Определим ускорение точки $\boldsymbol{B}$ (рис. 2.10).

Согласно теореме, ускорение точки $\boldsymbol{B}$ определятся по формуле

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA},$$

где $\overline{a}_A$ – ускорение точки A, принятой за полюс;

$\overline{a}_{BA}$ – ускорение точки $\boldsymbol{B}$ во вращательном движении вокруг полюса $\boldsymbol{A}$.

Точка $\boldsymbol{A}$ принадлежит кривошипу $\boldsymbol{OA}$, движение которого известно, тогда

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^{вр} + \overline{a}_A^{ц}, \text{ где } \overline{a}_A^{вр} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 30 = 60 \text{ см/с}^2,$$

$$\overline{a}_A^{ц} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 3^2 \cdot 30 = 270 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\overline{a}_A^{\tau}$ – направлен перпендикулярно $\boldsymbol{OA}$ в сторону, обратную $\overline{V}_A$, т.к. вращение кривошипа по условию задачи замедленное. Вектор $\overline{a}_A^{n}$ – направлен от $\boldsymbol{A}$ к O. Вектор $\overline{a}_{BA} = \overline{a}_{BA}^{вр} + \overline{a}_{BA}^{ц}$; $a_{BA}^{ц} = \omega_{II}^2 \cdot r = 1^2 \cdot 10 = 10$ см/с^2 и направлен от точки $\boldsymbol{B}$ к полюсу $\boldsymbol{A}$.

$$a_{BA}^{вр} = \varepsilon_{II} \cdot r\,.$$

Для его вычисления найдем угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon_{II}}$:

$$\varepsilon_{II} = \frac{d\omega_{II}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{V_D - V_A}{r}\right) = \frac{1}{r}\cdot\frac{dV_D}{dt} - \frac{1}{r}\cdot\frac{dV_A}{dt}\,r.$$

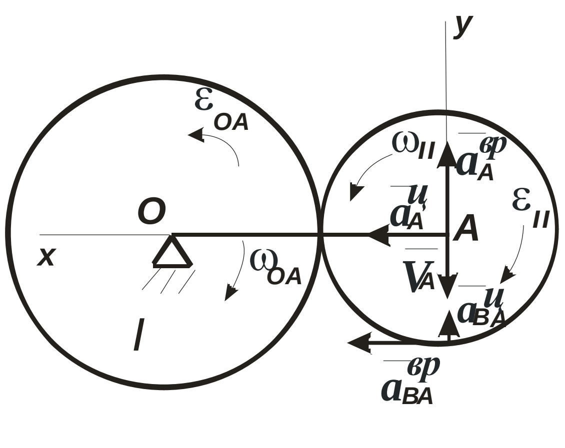


Рис. 2.10

В задачах такого типа величина $\boldsymbol{\varepsilon_{II}}$ постоянная и выносится за знак производной:

$$\frac{dV_D}{dt} = a_D^\tau = \varepsilon_I \cdot R; \qquad \frac{dV_A}{dt} = a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot (R + r);$$

отсюда $\varepsilon_{II} = \frac{\varepsilon_I R}{r} - \frac{1}{r} \cdot \varepsilon_{OA}(R + r) = \frac{1 \cdot 10}{10} - \frac{2 \cdot 30}{10} = -4$ с$^{-2}$

Знак «-» говорит о том, что колесо *II* вращается замедленно.

Величина $a_{BA}^\tau = \varepsilon_{II} \cdot r = 4 \cdot 10 = 40$ см/с^2 направлена перпендикулярно $\boldsymbol{\bar{a}_{BA}^n}$. Полное ускорение найдем, сложив все слагаемые:

$$\boldsymbol{\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^{вр} + \bar{a}_{BA}^{ц}}.$$

Направив ось Ax вдоль $\boldsymbol{AO}$, ось $\boldsymbol{Ay}$ перпендикулярно $\boldsymbol{AO}$, получим

$$a_{Bx} = a_{Ax} + a_{BAx} = a_A^n + a_{BA}^{вр} = 270 + 40 = 310 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{By} = a_{Ay} + a_{BAy} = a_A^\tau + a_{BA}^{ц} = 60 + 10 = 70 \text{ см/с}^2,$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{310^2 + 70^2} = 317{,}8 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\boldsymbol{\bar{a}_B}$ составляет с осью Ax угол $\boldsymbol{\alpha}$, косинус которого $\cos\alpha = \frac{a_{Bx}}{a_B} = \frac{310}{312{,}8} \approx 0{,}975$, $\alpha = \arccos 0{,}975 = 14°$, а с осью $\boldsymbol{Ay}$ угол $\boldsymbol{\beta}$, косинус которого $\cos\beta = \frac{a_{BY}}{a_B} = \frac{70}{317{,}8} = 0{,}220$, $\beta = \arccos 0{,}220 = 76°$.

2.2 ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Требуется для заданного положения механизма определить скорости и ускорения точек $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат. Необходимые для расчета исходные данные приведены в таблице 2.1, схемы механизмов на рис. 2.11-2.15.

Указание к выполнению задания:

1) данная задача на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек можно воспользоваться либо теоремой о скоростях точек в плоском движении, либо понятием мгновенного центра скоростей. Проверить результаты определения скоростей можно с помощью следствия из теоремы о скоростях точек;

2) при определении ускорений точек нужно исходить из векторного равенства (2). В тех случаях, когда неизвестно угловое ускорение звена (пример 2.1.1), необходимо это векторное равенство спроецировать на выбранные оси координат и из полученных двух уравнений найти два неизвестных ускорения. В случаях, когда угловое ускорение может быть найдено как производная от угловой скорости (см. пример 2.1.2), и все составляющие формулы 2 определяются сразу, результирующее ускорение находится по формуле (2′);

3) при определении скоростей точек необходимо воспользоваться методом мгновенного центра скоростей, а для проверки результатов решения можно применить теорему о равенстве проекций скоростей точек на ось, проведенную

через эти точки. При определении ускорений точек необходимо воспользоваться теоремой об ускорениях точек плоской фигуры, а затем методом проекций векторного уравнения на соответствующие оси координат вычислить неизвестные ускорения точек.

$\boldsymbol{\omega_{OA}}$ и $\boldsymbol{\varepsilon_{OA}}$ – угловая скорость и угловое ускорение кривошипа OA при заданном положении механизма;

$\boldsymbol{\omega_{I}}$ – угловая скорость колеса (постоянная);

$\boldsymbol{v_A}$ и $\boldsymbol{a_A}$ – скорость и ускорение точки $\boldsymbol{A}$;

4) качение колес происходит без скольжения.

Таблица 2.1

№ вар.	Размеры, см				ω_{OA}, с$^{-1}$	ω_{I}, с$^{-1}$	ε_{OA}, с$^{-1}$	v_A, см/с	a_A, см/с^2
	OA	***r***	***AB***	***AC***					
1	-	15	-	5	-	-	-	60	30
2	-	-	30	15	-	-	-	10	15
3	50	10	-	5	1	0	1	-	-
4	-	30	-	10	-	-	-	80	50
5	10	-	50	25	1	-	1	-	-
6	30	15	-	-	2	0	5	-	-
7	-	50	-	-	-	-	-	50	100
8	20	-	60	40	2	-	4	-	-
9	-	-	60	25	-	-	-	20	10
10	40	-	-	20	5	-	10	-	-
11	30	20	-	10	2	1,2	0	-	-
12	-	-	60	20	-	-	-	30	30
13	40	-	40	15	2	-	6	-	-
14	50	10	-	5	1	2,5	0	-	-
15	5	-	40	15	1	-	2	-	-
16	-	-	50	20	-	-	-	5	10
17	20	10	-	4	3	12	0	-	-
18	-	-	40	30	-	-	-	20	10
19	35	-	55	15	2	-	3	-	-
20	30	20	-	10	3	0	2	-	-
21	10	-	40	15	1	-	2	-	-
22	-	-	40	10	-	-	-	40	20
23	20	10	-	5	2	0	2	-	-
24	15	-	-	10	4	-	8	-	-
25	20	-	50	15	4	-	6	-	-
26	15	-	25	15	5	-	10	-	-
27	60	30	-	10	1	1	0	-	-
28	30	-	-	20	1	-	1	-	-
29	25	-	60	40	4	-	10	-	-
30	15	-	40	10	3	-	8	-	-

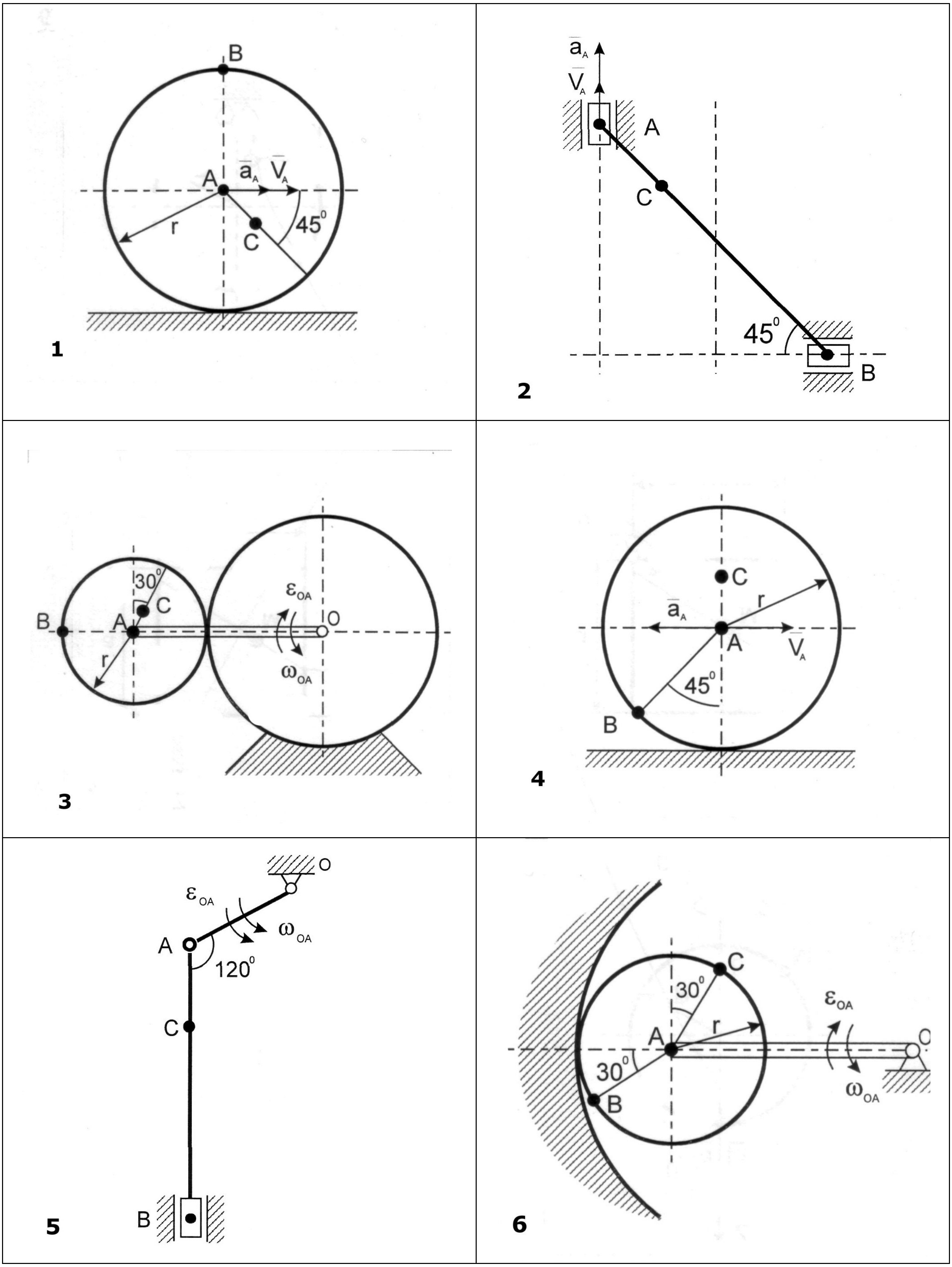
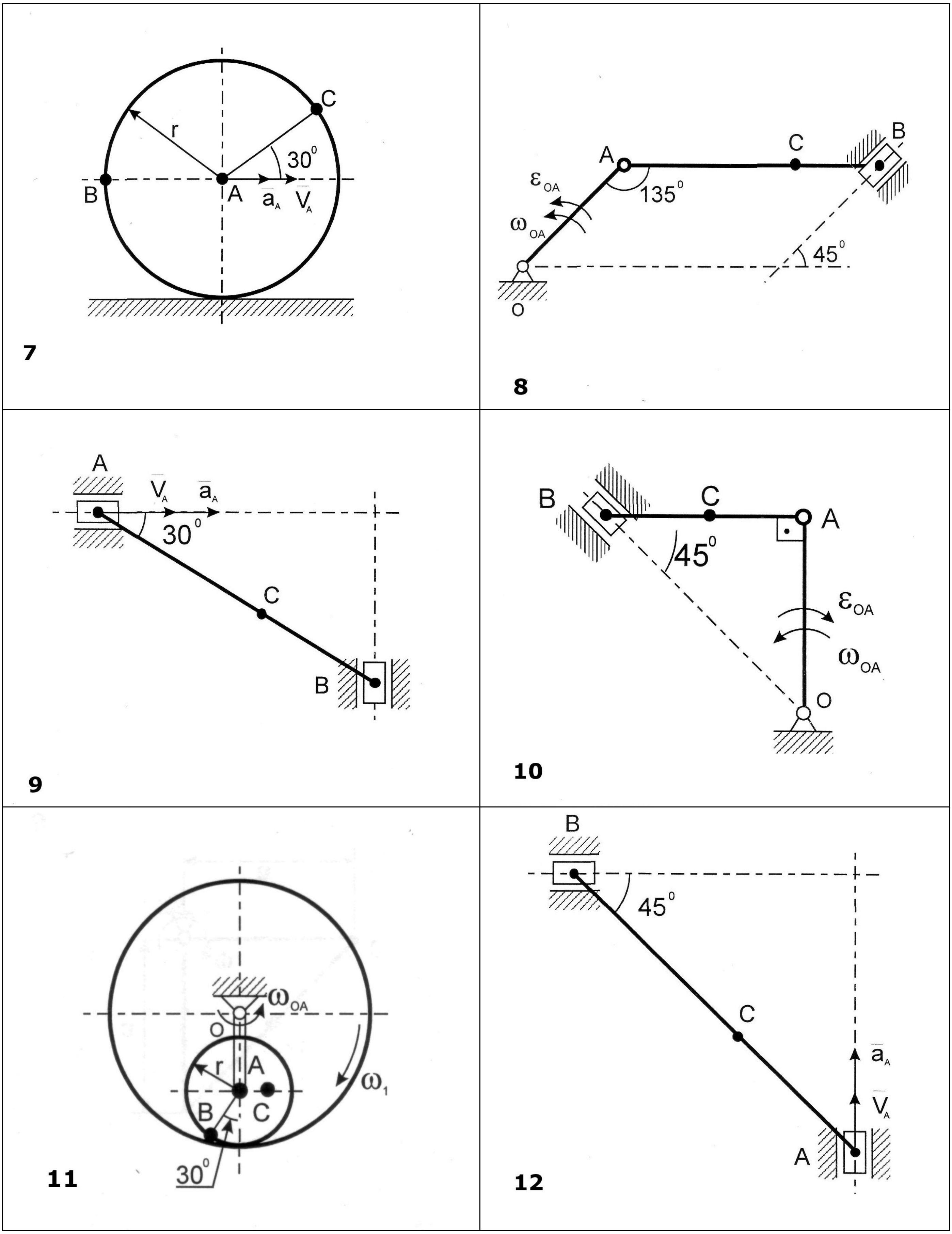


Рис. 2.11



7
C
r
30°
B
A
$\bar{a}_A$
$\bar{V}_A$
8
A
C
B
ε_{OA}
ω_{OA}
135°
45°
O
9
A
$\bar{V}_A$
$\bar{a}_A$
30°
C
B
10
B
C
A
45°
ε_{OA}
ω_{OA}
O
11
ω_{OA}
O
r
A
B
C
ω_1
30°
12
B
45°
C
$\bar{a}_A$
$\bar{V}_A$
A

Рис. 2.12

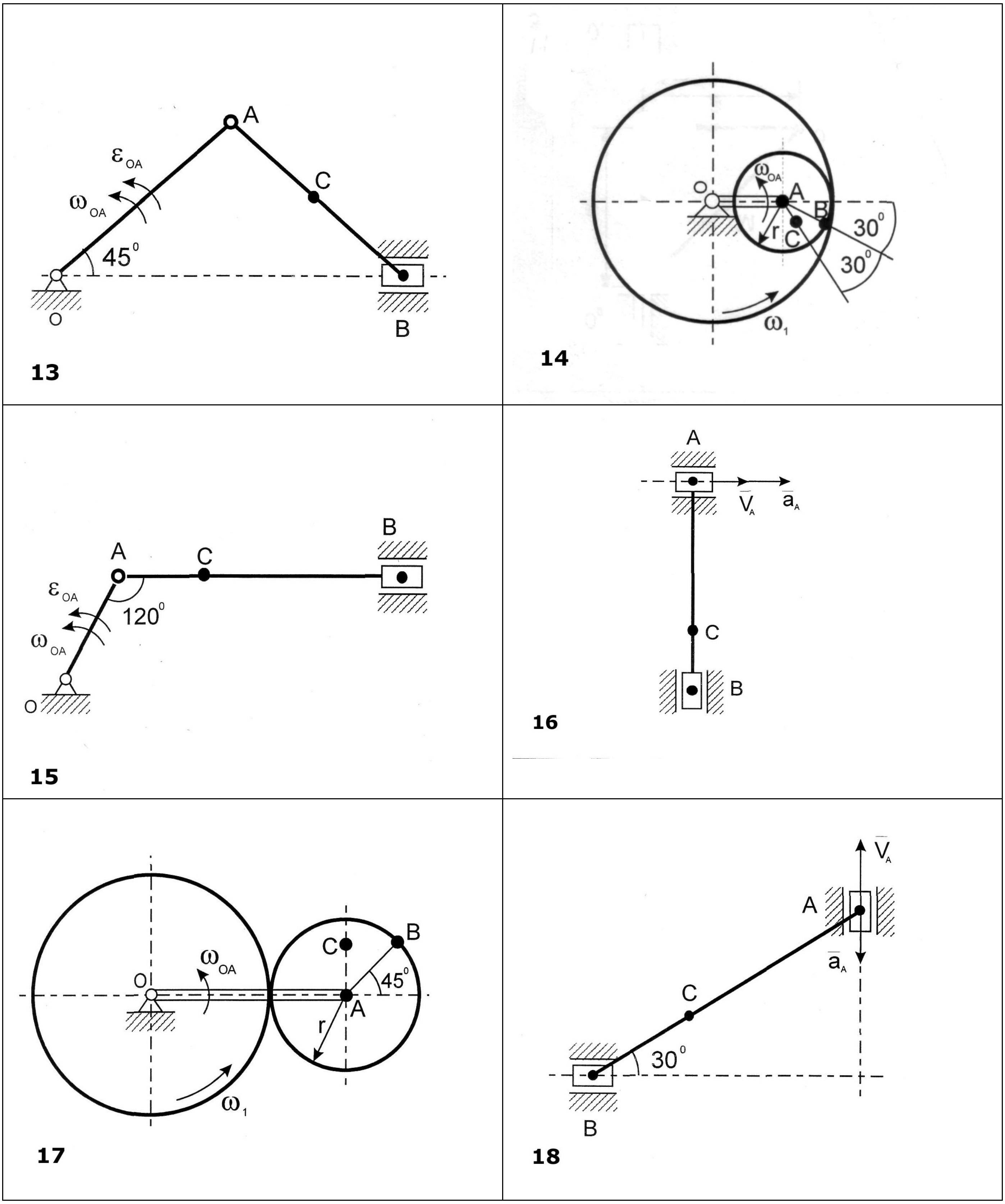
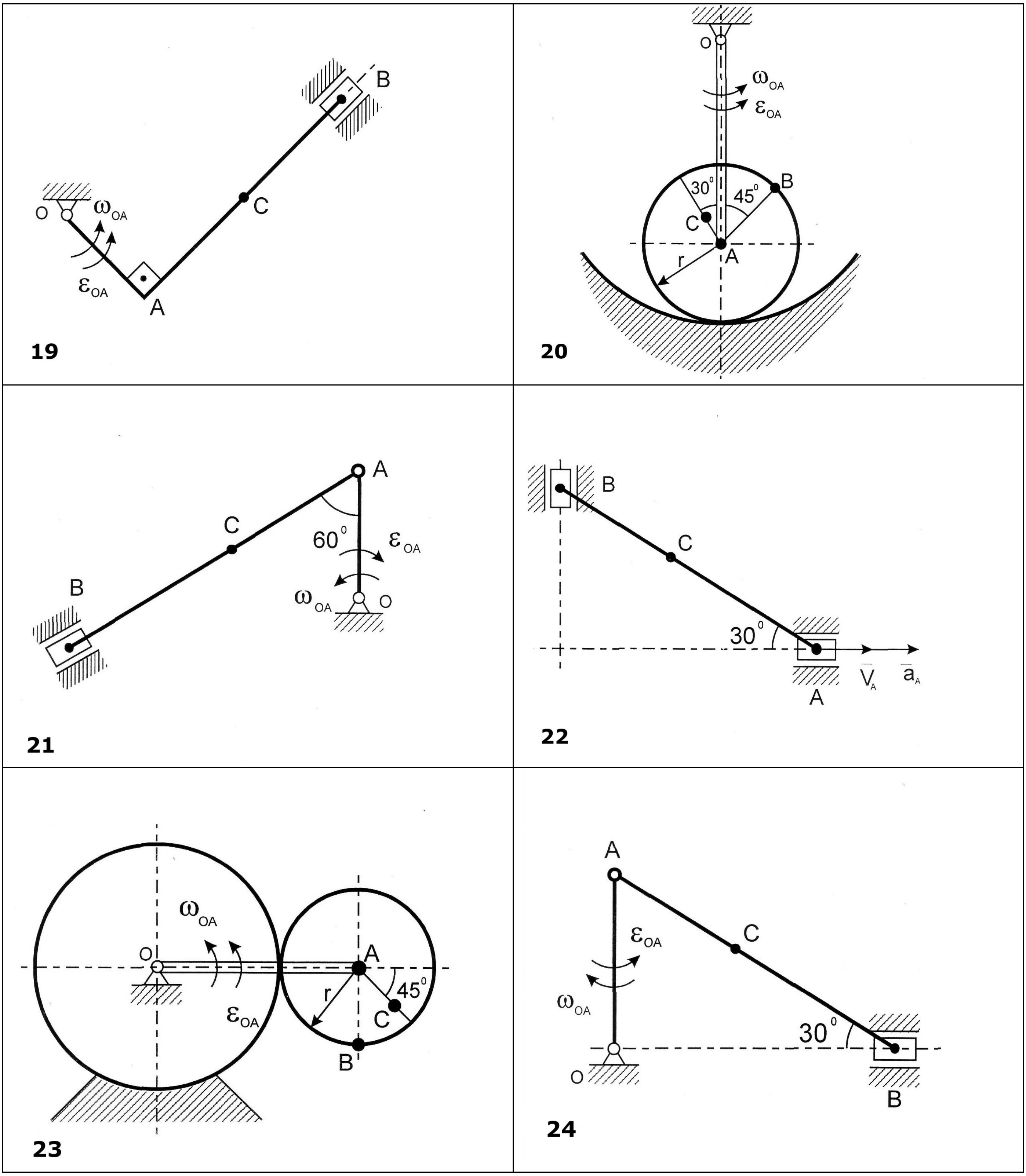


Рис. 2.13



B
C
O
ω_{OA}
ε_{OA}
A
19
O
ω_{OA}
ε_{OA}
30^0
45^0
B
C
A
r
20
A
C
60^0
ε_{OA}
B
ω_{OA}
O
21
B
C
30^0
$\bar{V}_A$
$\bar{a}_A$
A
22
ω_{OA}
O
A
45^0
r
ε_{OA}
C
B
23
A
ε_{OA}
C
ω_{OA}
30^0
O
B
24

Рис. 2.14

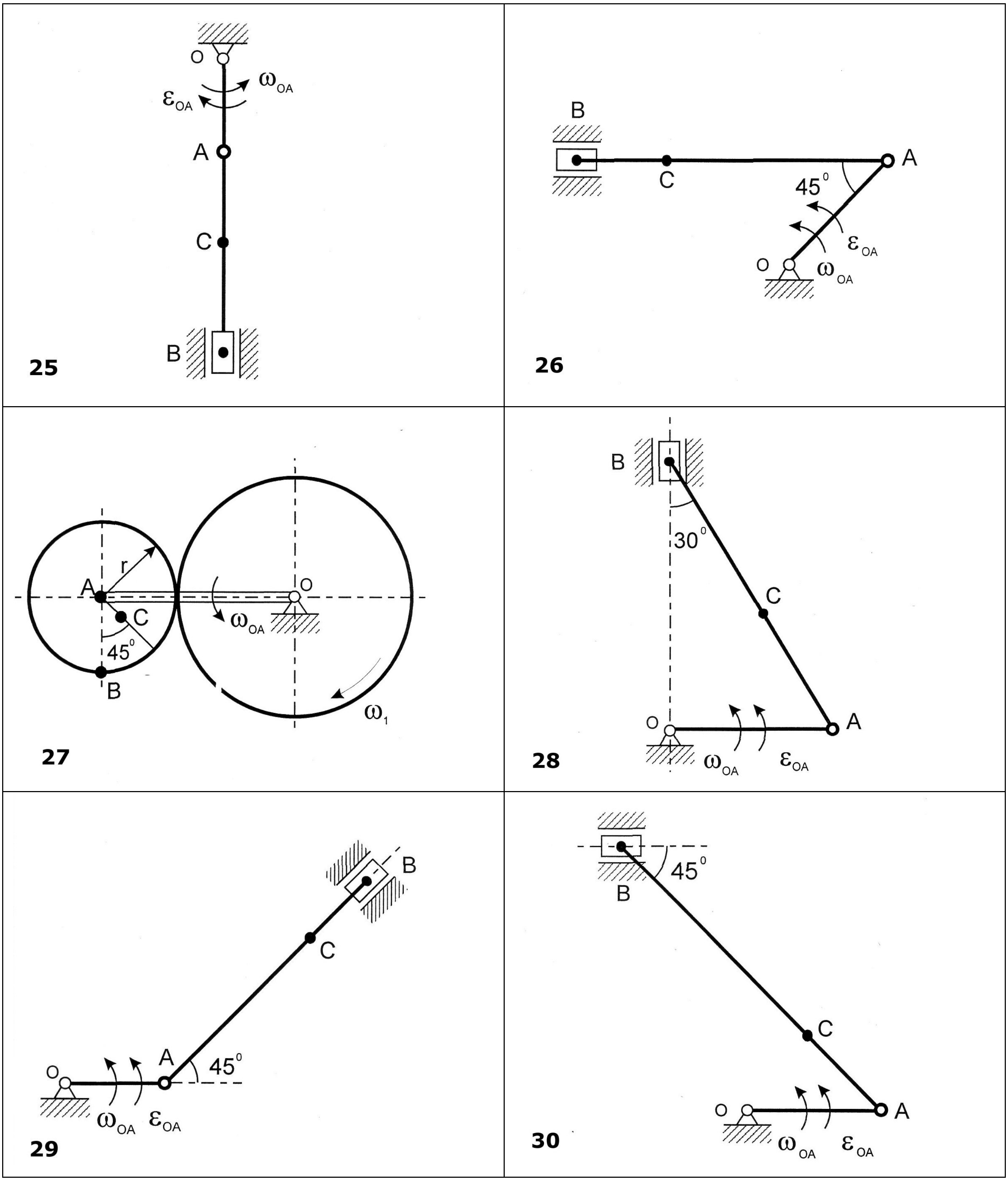

25
O
A
C
B
ω_{OA}
ε_{OA}
26
B
C
A
45^0
O
ω_{OA}
ε_{OA}
27
A
r
C
45^0
B
O
ω_{OA}
ω_1
28
B
30^0
C
O
A
ω_{OA}
ε_{OA}
29
O
A
45^0
C
B
ω_{OA}
ε_{OA}
30
B
45^0
C
O
A
ω_{OA}
ε_{OA}

Рис. 2.15

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1 Какое движение твердого тела называется плоским?

2 Напишите закон плоского движения?

3 Зависят ли поступательное перемещение плоской фигуры и ее поворот от выбора полюса?

4 Как определяется скорость любой точки плоской фигуры?

5 Покажите, что проекция скоростей точек неизменяемого отрезка на ось, совпадающую с этим отрезком, равны между собой?

6 Какую точку плоской фигуры называют мгновенным центром скоростей и каковы основные случаи определении его положения?

7 Что представляет собой распределение скоростей точек плоской фигуры в данный момент?

8 Как определяется ускорение любой точки плоской фигуры?

9 Какую точку плоской фигуры называют мгновенным центром ускорений и может ли мгновенный центр ускорений совпадать с мгновенным центром скоростей?

10 Перечислите известные Вам способы определения положения мгновенного центра скоростей?

11 Что представляет собой картина распределения ускорений точек плоской фигуры в данный момент времени в трех случаях:

1) $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}$; 2) $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$; 3) $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}$?

12 Как производят определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев плоского механизма?

3 ЗАДАЧА К3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АБСОЛЮТНОЙ СКОРОСТИ И АБСОЛЮТНОГО УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ

3.1 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Треугольник $\boldsymbol{D}$ вращается вокруг оси $\boldsymbol{O_1O_2}$ (рис. 3.1, а). По стороне треугольника движется точка $\boldsymbol{M}$. По заданным уравнениям относительного движения точки $\boldsymbol{M}$ и движения треугольника $\boldsymbol{D}$ определить для момента времени $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_1}$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки $\boldsymbol{M}$.

$$\boldsymbol{s_r} = \boldsymbol{OM} = \mathbf{16} - \mathbf{8}\,\mathbf{cos}(\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{t}),\ \text{см};\ \boldsymbol{\varphi_e} = 0{,}9\boldsymbol{t}^2 - 9\boldsymbol{t}^3,\ \text{рад};\ \boldsymbol{t}_1 = \frac{2}{9}\ \text{с}.$$

Решение. Точка $\boldsymbol{M}$ совершает сложное движение. Движется относительно треугольника $\boldsymbol{D}$ и вместе с треугольником вращается вокруг оси $\boldsymbol{O_1O_2}$. Тогда движение точки относительно треугольника будет относительным, движение вместе с треугольником – переносным. Будем считать, что в заданный момент времени плоскость чертежа совпадает с плоскостью треугольника $\boldsymbol{D}$. Положение точки $\boldsymbol{M}$ на треугольнике $\boldsymbol{D}$ определяется расстоянием $\boldsymbol{s_r} = \boldsymbol{OM}$.

При $\boldsymbol{t} = \frac{2}{9}$ с $\boldsymbol{s_r} = 16 - 8\,\mathbf{cos}(3\pi\frac{2}{9}) = 20{,}0$ см.

Абсолютную скорость точки M найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей: $\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}} + \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{e}}$.

Модуль относительной скорости $\boldsymbol{v_r} = \left|\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}\right|$, где $\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\boldsymbol{ds_r}}{\boldsymbol{dt}} = 24\pi\,\mathbf{sin}(3\boldsymbol{\pi t})$ - алгебраическое значение относительной скорости.

При $\boldsymbol{t} = \frac{2}{9}$ с $\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}} = 65{,}2$ см/с; $\boldsymbol{v_r} = 65{,}2$ см/с.

Положительный знак у $\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}$ показывает, что вектор $\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}$ направлен в сторону возрастания $\boldsymbol{s_r}$.

Модуль переносной скорости

$$\boldsymbol{v_e} = \boldsymbol{R\omega_e}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{R}$ – радиус окружности $\boldsymbol{L}$, описываемой той точкой тела, с которой в данный момент совпадает точка $\boldsymbol{M}$; $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{s_r} \cdot \mathbf{sin}\,30^\circ = 10{,}0$ см; $\boldsymbol{\omega_e}$ – модуль угловой скорости тела

$$\omega_e = |\tilde{\omega}_e|;\ \tilde{\omega}_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 1{,}8t - 27t^2.$$

При $t = \frac{2}{9}$ с $\tilde{\omega}_e = -0{,}93$ рад/с; $\omega_e = 0{,}93$ рад/с.

Отрицательный знак у величины $\tilde{\omega}_e$ показывает, что вращение треугольника происходит вокруг оси $\boldsymbol{Oz}$ в сторону, обратную направлению отсчета угла φ. Поэтому вектор $\vec{\omega}_e$ направлен по оси $\boldsymbol{Oz}$ вниз (рис. 3.1, б).

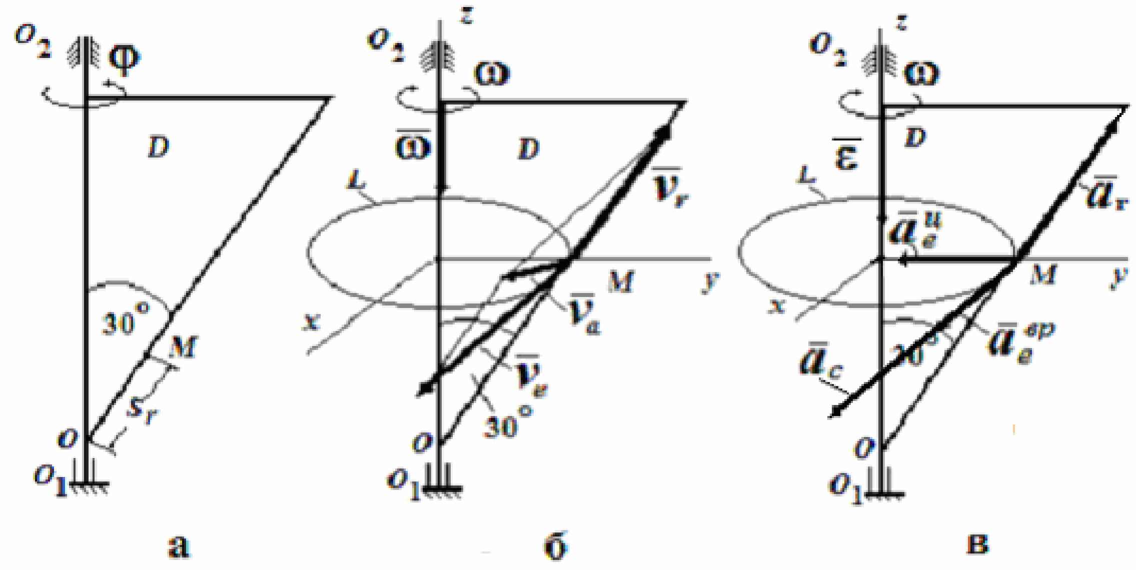


Рис. 3.1

Модуль переносной скорости по формуле (1) $v_e = 9{,}3$ см/с.

Вектор $\bar{v}_e$ направлен по касательной к окружности $\boldsymbol{L}$ в сторону вращения тела.

Так как $\bar{v}_e$ и $\bar{v}_r$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости точки $\boldsymbol{M}$

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} \quad \text{или} \quad v = 65{,}9 \text{ см/с}.$$

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c$$

или в развернутом виде $\bar{a} = \bar{a}_{r\tau} + \bar{a}_{rn} + \bar{a}_e^{в} + \bar{a}_e^{ц} + \bar{a}_c$.

Модуль относительного касательного ускорения $a_{r\tau} = |\tilde{a}_{r\tau}|$, где $\tilde{a}_{r\tau} = \dfrac{d^2 s_r}{dt^2} = 72\pi^2 \cos 3\pi t$.

При $t = \dfrac{2}{9}$ с $\tilde{a}_{r\tau} = -355$ см/с^2; $a_{r\tau} = 355$ см/с^2.

Отрицательный знак $\tilde{a}_{r\tau}$ показывает, что вектор $\bar{a}_{r\tau}$ направлен в сторону отрицательных значений s_r. Знаки $\tilde{v}_r$ и $\tilde{a}_{r\tau}$ различны, следовательно, относительное движение точки M замедленное.

Относительное нормальное ускорение

$$a_{rn} = \frac{v_r^2}{\rho} = 0,$$

так как траектория относительного движения – прямая ($\rho = \infty$).

Модуль переносного вращательного ускорения

$$a_e^{в} = R\varepsilon, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_e = \left|\tilde{\varepsilon}_e\right|$ – модуль углового ускорения тела D

$$\tilde{\varepsilon}_e = \frac{d^2\varphi_e}{dt^2} = 1{,}8 - 54t.$$

При $t = \dfrac{2}{9}$ с $\tilde{\varepsilon}_e = -10{,}2$ рад/с^2; $\varepsilon_e = 10{,}2$ рад/с^2.

Знаки $\tilde{\varepsilon}_e$ и $\tilde{\omega}_e$ одинаковы; следовательно, вращение треугольника D ускоренное, направления векторов $\bar{\varepsilon}_e$ и $\bar{\omega}_e$ совпадают (рис. 3.1, б, в).

Согласно (2) $a_e^{в} = 102$ см/с^2. Вектор $\bar{a}_e^{в}$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\bar{v}_e$.

Модуль переносного центростремительного ускорения

$$a_e^{ц} = R\omega_e^2 \quad \text{или} \quad a_e^{ц} = 9 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_e^{ц}$ направлен к центру окружности L.

Кориолисово ускорение $\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$.

Модуль кориолисова ускорения $a_c = 2\omega_e v_r \sin(\bar{\omega}_e \bar{v}_r)$,

где $\sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r) = \sin 150^\circ = 0{,}5$.

С учетом найденных выше значений ω_e и v_r получаем $a_c = 61$ см/с^2.

Вектор $\bar{a}_c$ направлен, согласно правилу векторного произведения, к нам - перпендикулярно плоскости треугольника D (рис. 3.1, в).

Модуль абсолютного ускорения точки M находим способом проекций:

$$a_x = a_e^в + a_c;$$

$$a_y = -a_e^ц - a_{r\tau}\cos 60°;$$

$$a_z = -a_{r\tau}\sin 60°;\ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Результаты расчета сведены в таблицу 3.1.

Таблица 3.1

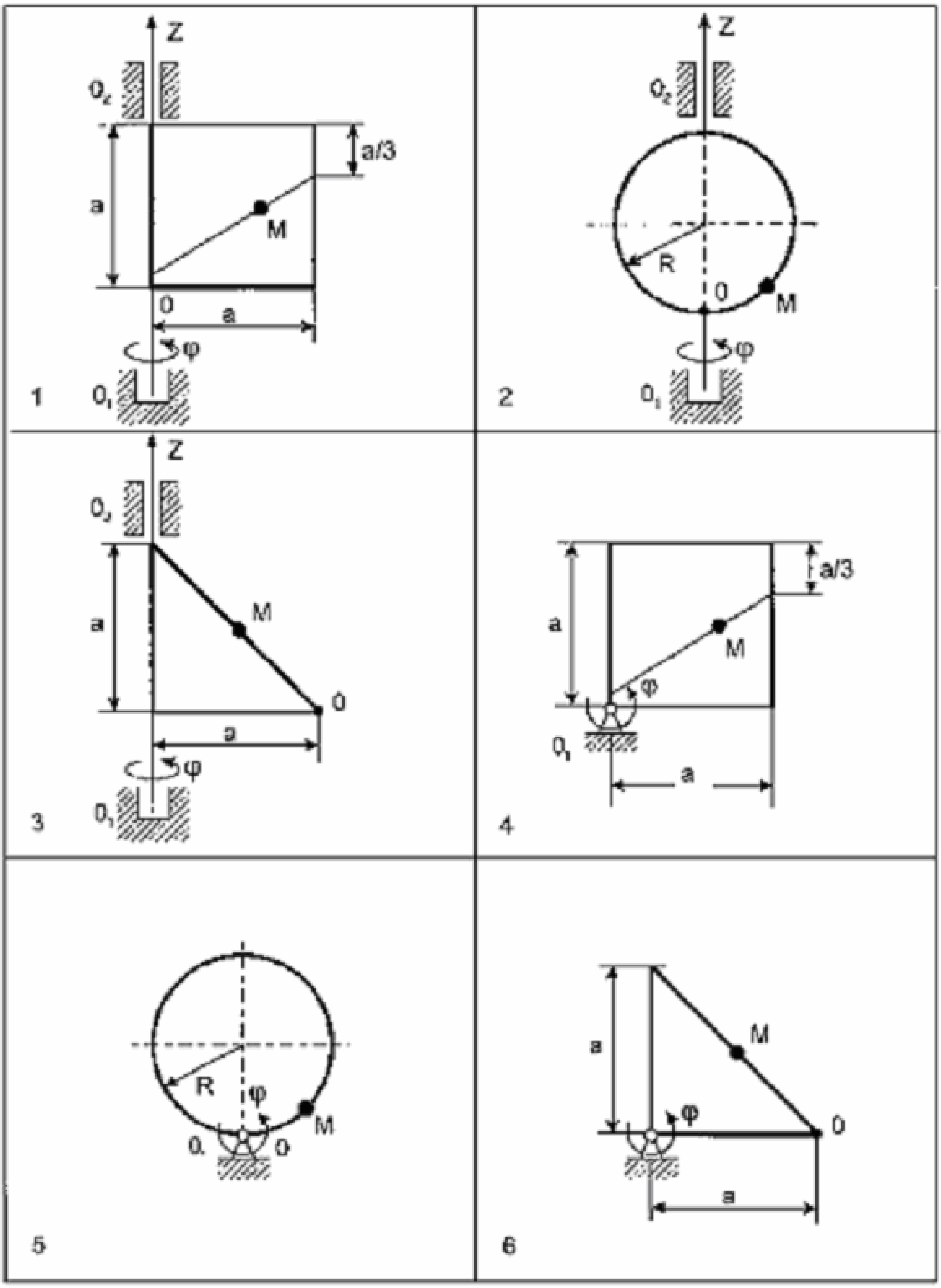
$\vec{\omega}_e$, рад/с	Скорость, см/с			$\tilde{\varepsilon}_e$ рад/с^2	Ускорение, см/с^2								
	v_e	v_r	v_a		$a_e^ц$	$a_e^в$	a_{rn}	$\tilde{a}_{r\tau}$	a_c	a_x	a_y	a_z	a
-0,93	9,3	65,2	65,9	-10,2	9	102	0	-355	61	163	-186	308	395

3.2 ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Прямоугольная (варианты 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 30), круглая (варианты 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 28, 29) или треугольная (варианты 3, 6, 9, 12, 15, 18) пластинка вращается вокруг неподвижной оси O_1O_2 по закону $\varphi = f(t)$, (в вариантах 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 16, 17, 19, 21, 25, 26 и 30 ось O_1O_2 перпендикулярна плоскости чертежа). Положительное направление отсчета угла φ показано стрелкой. По пластинке движется точка M с законом движения $OM = f_1(t)$. В момент времени $t = 1$ с определить абсолютную скорость (v_a) и абсолютное ускорение (a_a) точки M. Данные для решения задачи приведены в таблице 3.2 и на рис. 3.2-3.6.

Таблица 3.2

№ вар	$\varphi = f(t)$, рад	$S = OM = f_1(t)$, м	b, м	R, м	№ вар	$\varphi = f(t)$, рад	$S = OM = f_1(t)$, м	b, м	R, м
1	$3 \cdot t^2$	$\frac{b \cdot t^2}{2}$	9	-	**16**	$\pi - \frac{\pi \cdot t^2}{2}$	$\frac{b \cdot t^2}{2}$	20	-
2	$\frac{\pi \cdot t^2}{2}$	$\frac{\pi \cdot R \cdot t^2}{4}$	-	2	**17**	$\frac{t}{2} + 1{,}5t^2$	$3 \cdot t + 2 \cdot t^3$	-	40
3	$2 \cdot t^2$	$b \cdot t^2$	3	-	**18**	$\frac{b \cdot t^2}{4}$	$20\pi \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right)$	40	-
4	$\pi \cdot t^2$	$\frac{b \cdot t^2}{2} + 2$	6	-	**19**	$\frac{\pi \cdot t^2}{2}$	$\frac{b \cdot t}{2}$	20	-
5	$2 \cdot t^2$	$\frac{\pi \cdot R \cdot t^4}{4}$	-	4	**20**	$8 \cdot t - 0{,}4t^2$	$20 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right)$	-	10
6	$\frac{\pi \cdot t}{3}$	$\frac{b \cdot t^2}{3}$	6	-	**21**	$\frac{b \cdot t^3}{3}$	$\frac{b \cdot t\sqrt{5}}{2}$	30	-
7	$\frac{\pi \cdot t^4}{2}$	$\frac{b \cdot t^2}{4} + 2$	4	-	**22**	$\frac{R \cdot t^2}{2}$	$R\cos\frac{\pi \cdot t}{3}$	-	40
8	$2 \cdot t - 3 \cdot t^2$	$15\pi\left(t + t^2\right)$	-	1,5	**23**	$R \cdot t^3$	$R\sin\frac{\pi \cdot t}{6}$	-	20
9	$4 \cdot t - 2 \cdot t^2$	$1{,}5 + 10\sin(\pi t)$	6	-	**24**	$b \cdot t^2$	$b\cos\frac{\pi \cdot t}{3}$	10	-
10	$2 \cdot t^3 - t^2$	$10\sin\frac{\pi}{6}$	10	-	**25**	$\frac{b \cdot t^4}{2}$	$b\cos(\pi \cdot t)$	0,2	-
11	$2t - 0{,}5t^2$	$10\sin\frac{\pi}{2}$	-	40	**26**	$R \cdot t$	$R \cdot \pi\cos\frac{\pi \cdot t}{3}$	-	30
12	$2 \cdot t^2$	$10\cos(\pi t)$	40	-	**27**	$\frac{\pi \cdot t^4}{2}$	$0{,}4 - b \cdot t^2$	0,2	-
13	$4 \cdot t^2$	$10\cos\frac{\pi}{3}$	20	-	**28**	$\frac{R \cdot t^4}{2}$	$R \cdot \pi\cos\frac{\pi \cdot t}{3}$	-	18
14	$2t - 0{,}5t^2$	$10\sin\frac{\pi t}{2}$	-	30	**29**	$R \cdot t^3$	$\frac{R \cdot \pi}{2}(1 + \sin\pi$	-	20
15	$3 \cdot t^2$	$10t^2$	30	-	**30**	$14 \cdot t^2$	$2{,}5b \cdot t$	4	-



Z
O2
a/3
a
M
0
a
φ
O1
1
Z
O2
R
0
M
φ
O1
2
Z
O2
a
M
0
a
φ
O1
3
a/3
a
M
φ
O1
a
4
R
φ
M
O1
O
5
a
M
φ
0
a
6

Рис. 3.2

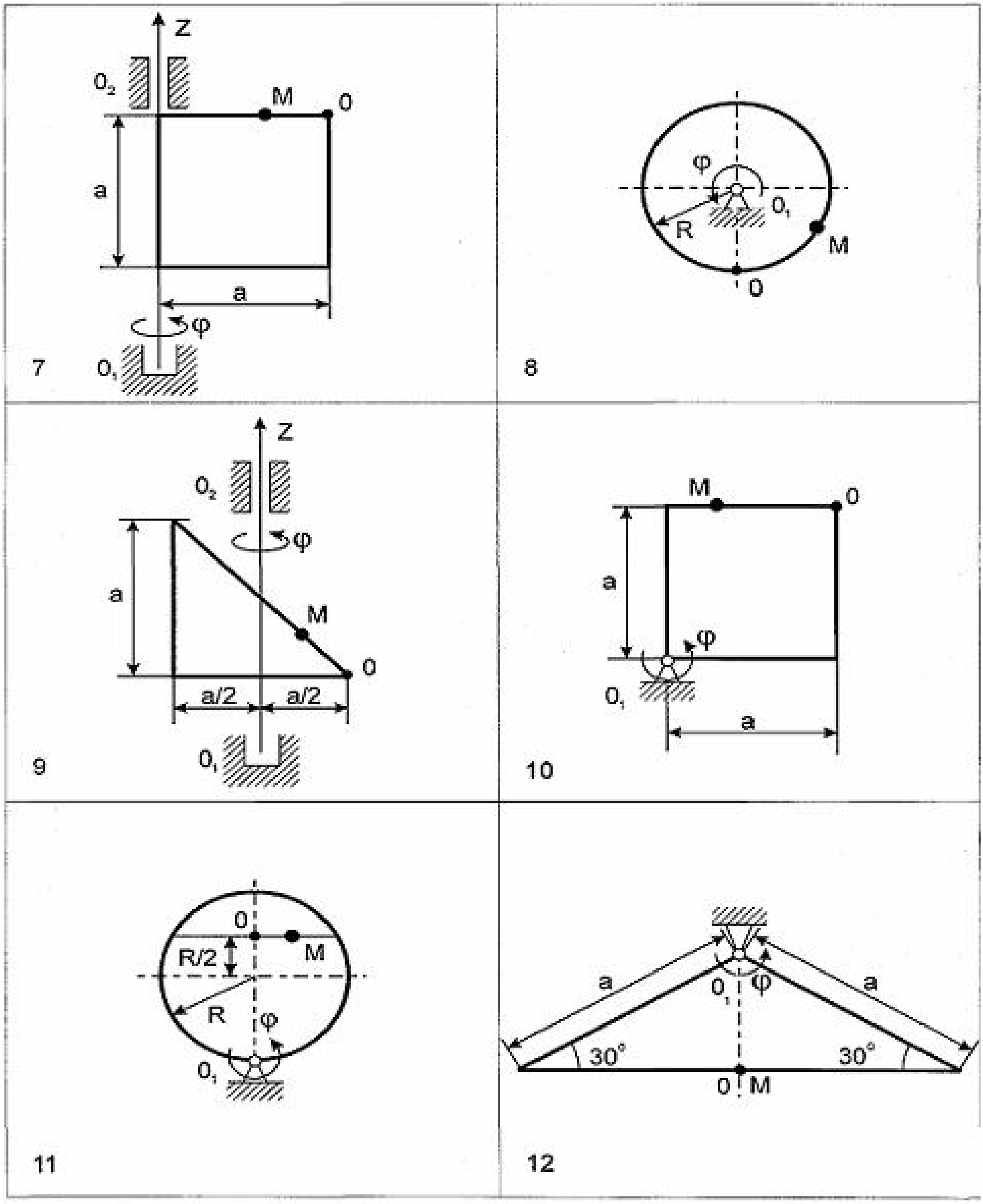

Z
0₂
M
0
a
a
φ
7
0₁
φ
R
0₁
M
0
8
Z
0₂
φ
a
M
0
a/2
a/2
9
0₁
M
0
a
φ
0₁
a
10
0
R/2
M
R
φ
0₁
11
a
a
0₁
φ
30°
30°
0 M
12

Рис. 3.3

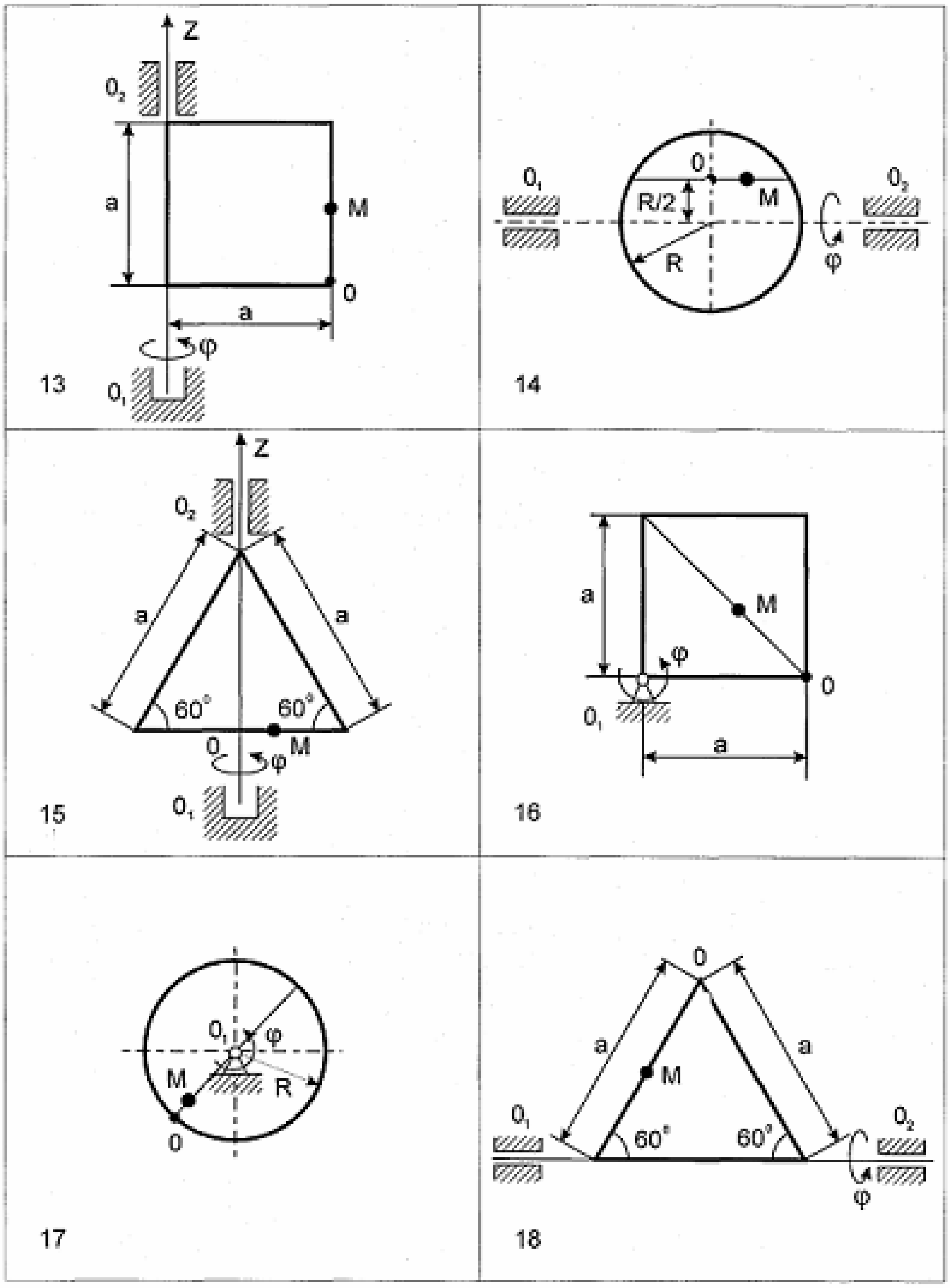

13
Z
0₂
a
M
0
a
φ
0₁
14
0₁
0
M
R/2
R
0₂
φ
15
Z
0₂
a
a
60°
60°
0
M
φ
0₁
16
a
M
φ
0
0₁
a
17
0₁
φ
M
R
0
18
0
a
a
M
0₁
60°
60°
0₂
φ

Рис. 3.4

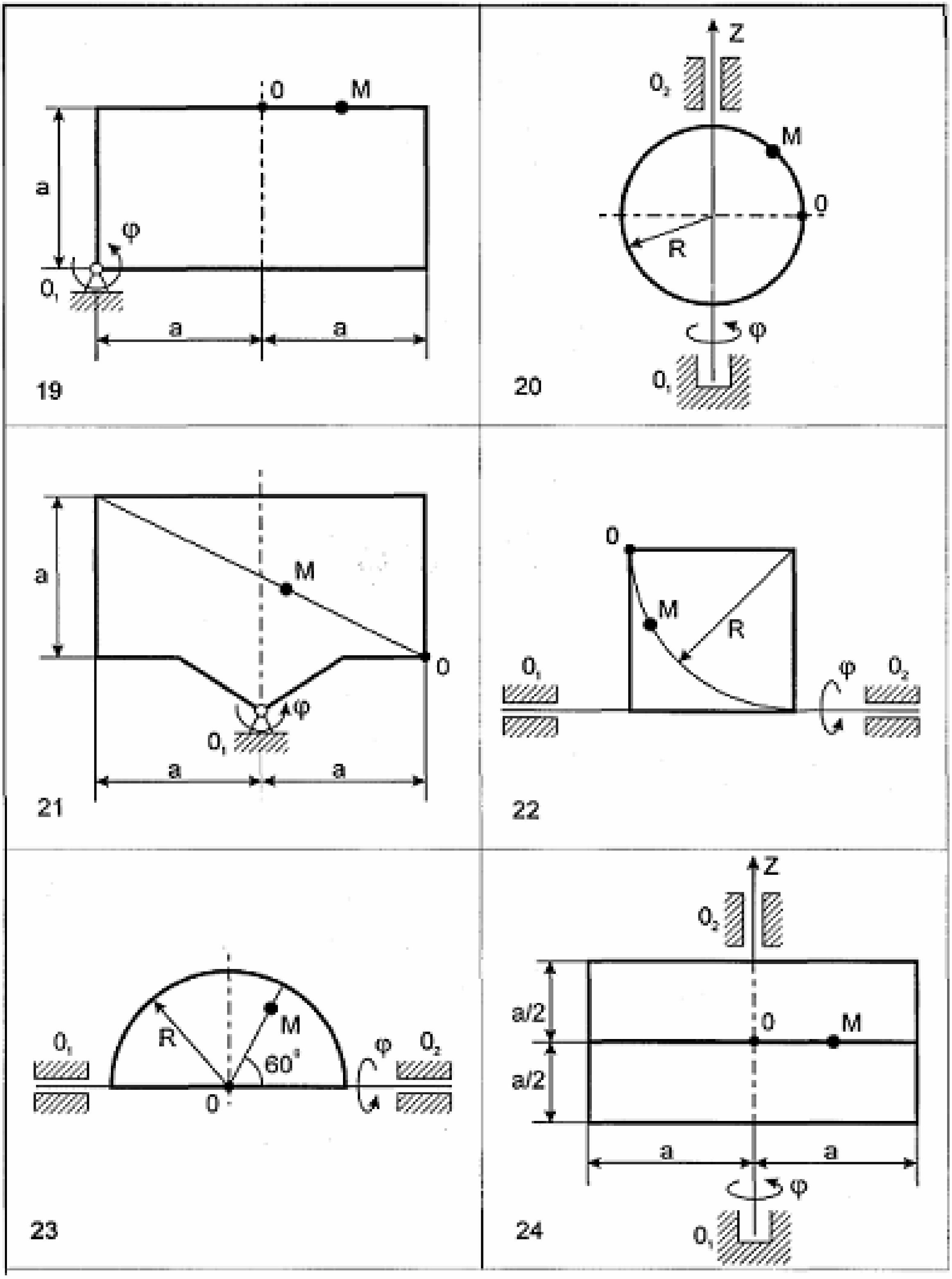

0
M
a
φ
0_1
a
a
19
Z
0_2
M
0
R
φ
0_1
20
a
M
0
φ
0_1
a
a
21
0
M
R
0_1
φ
0_2
22
R
M
0_1
60°
φ
0_2
0
23
Z
0_2
a/2
0
M
a/2
a
a
φ
0_1
24

Рис. 3.5

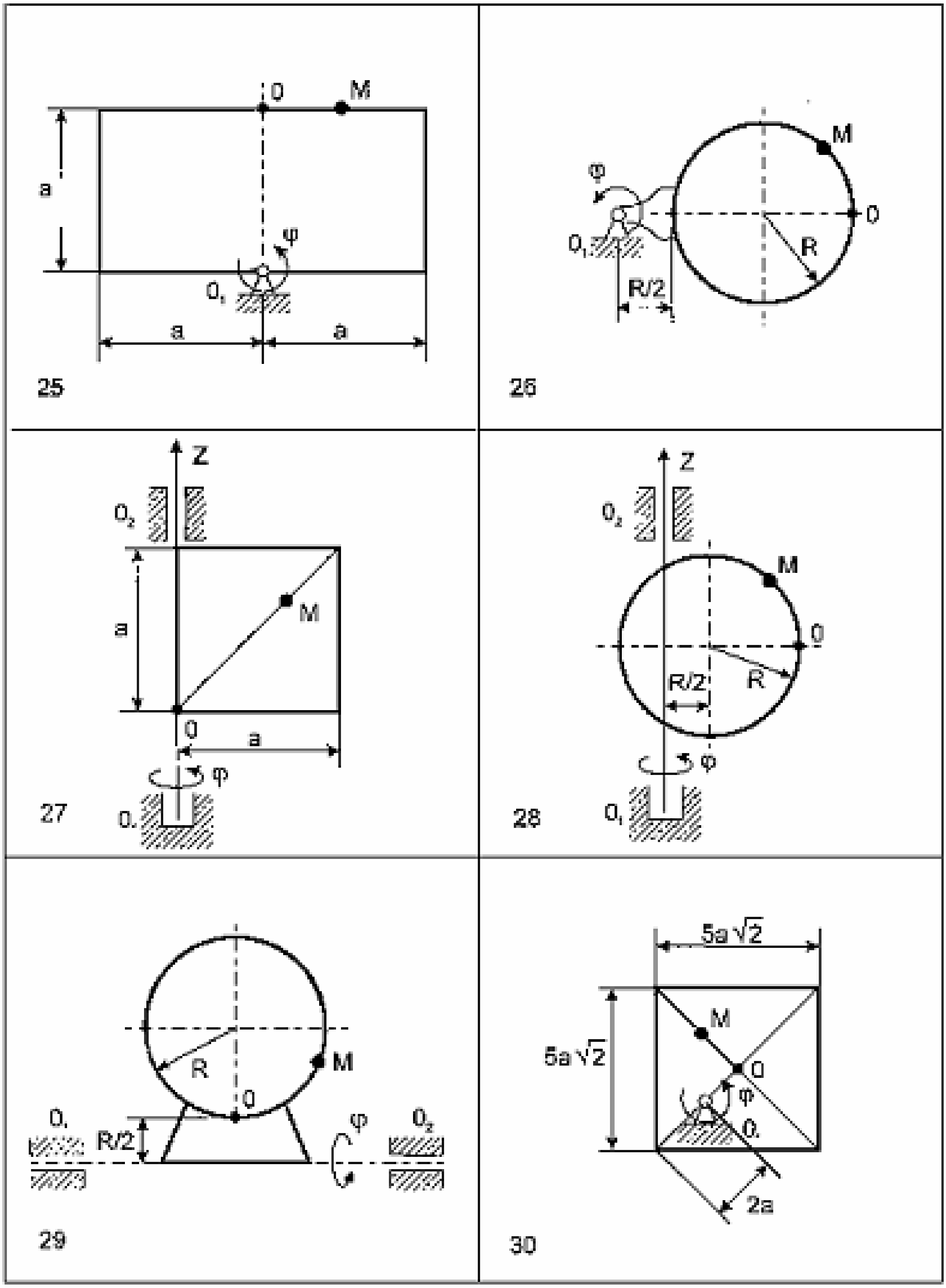

0
M
a
φ
O₁
a
a
25
M
φ
0
O₁
R
R/2
26
Z
O₂
a
M
0
a
φ
27
O.
Z
O₂
M
0
R/2
R
φ
28
O₁
R
M
0
O₁
R/2
φ
O₂
29
5a √2
M
5a √2
0
φ
O₁
2a
30

Рис. 3.6

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1 Какое движение называется сложным?
2 Какое движение называется относительным?
3 Какое движение называется переносным?
4 Дайте определение переносной скорости.
5 Дайте определение переносного ускорения.
6 Чему равно ускорение Кориолиса?
7 Сформулируйте правило Жуковского.
8 Сформулируйте правило векторного произведения.
9 В каких случаях ускорение Кориолиса равно нулю?
10 Чему равна величина ускорения Кориолиса?
11 В каком случае не нужно вычислять ускорение Кориолиса?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уфимский государственный нефтяной технический университет
Кафедра «Механика и конструирование машин»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Вариант 6

Студент гр. МЗЗ-07-01 ________________ Р.У. Ганиев
(подпись, дата)

Доцент ________________ М.Х. Аглиуллин
(подпись, дата)

Уфа 2008