Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уфимский государственный нефтяной технический университет»

Кафедра «Механика и конструирование машин»

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

Учебно-методическое пособие
по выполнению контрольной работы по теоретической механике

УФА 2008

Учебно-методическое пособие составлено с учетом рабочих программ дисциплины «Теоретическая механика», преподаваемой студентам технических вузов. Оно поможет обучающимся закрепить теоретический материал и оценить свои знания по разделам теоретической механики «Динамика точки. Общие теоремы динамики». Приведены примеры выполнения заданий, варианты заданий для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля.

Составители: Садыков В.А., профессор, канд. техн. наук,
Аглиуллин М.Х., доцент, канд. техн. наук,
Имаева Э.Ш., доцент, канд. техн. наук

Рецензент Загорский В.К., профессор, док. техн. наук

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Указания по выполнению и оформлению работы	4
1 Задача Д1	5
1.1 Пример выполнения задания	5
1.2 Задание для самостоятельной работы	10
Вопросы для самоконтроля	12
2 Задача Д2	13
2.1 Пример выполнения задания	13
2.2 Задание для самостоятельной работы	19
Вопросы для самоконтроля	26
Приложение	27

ВВЕДЕНИЕ

Целью учебно-методического пособия по выполнению контрольной работы №3 является оказание методической помощи студентам, изучающим разделы «Динамика точки. Общие теоремы динамики» в дисциплине «Теоретическая механика». Прикладные задачи этой темы применимы и в других разделах курса, а также в дисциплинах «Теория механизмов и машин», «Физика», «Детали машин», в ряде специальных дисциплин.

Контрольная работа №3 включает в себя две задачи:

- задача Д1 «Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки»,
- задача Д2 «Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы».

Номер варианта чертежа и исходных данных соответствует порядковому номеру студента в списке группы.

УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ РАБОТЫ

Контрольная работа выполняется на листах формата А4 в соответствии с ГОСТ 2.105-95. Поля очерчиваются рамкой (по ГОСТ 2.104), первый лист (с рамкой) – титульный (см. Приложение), все последующие листы (с рамкой) – с указанием порядкового номера страницы. Записи ведутся на лицевой стороне. Тыльная сторона – для замечаний и ответов при защите работы.

Выполнение работы начинается с записи исходных данных. В ходе решения задачи должен быть выполнен чертеж, на котором должны быть изображены все вектора скоростей, ускорений точек и действующих сил. Чертеж должен быть аккуратным, наглядным. Решение задачи необходимо сопровождать краткими разъяснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получены те или иные результаты), необходимо подробно излагать весь ход расчетов. В конце должны быть даны численные ответы.

В электронном варианте оформления контрольной работы допускается выполнение чертежа вручную с последующим его сканированием и вставкой в текстовый файл. Отпечатанный в MS Word (Open Office) текст может быть оформлен без соблюдения ГОСТ 2.104 (без рамок).

1 ЗАДАЧА Д1

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Рассмотрим следующие случаи выражения силы, действующей на точку:

1) сила зависит от времени;
2) сила зависит от положения точки в пространстве;
3) сила зависит от скорости точки.

Пусть свободная материальная точка массой m движется под действием силы

$$\overline{F} = \bar{i}b_1\cos\omega t + \bar{j}b_2 v_y + \bar{k}b_3 z,$$

где b_1, b_2, b_3 - некоторые постоянные коэффициенты при начальных условиях

$$x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 \neq 0, v_{x0} = 0, v_{y0} \neq 0, v_{z0} = 0.$$

Необходимо определить уравнения движения точки в координатной форме.

Запишем для этой точки дифференциальные уравнение в проекциях на декартовы оси координат

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = b_1\cos\omega t$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = b_2 v_y \qquad (7)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = b_3 z.$$

Первое уравнение системы (7) можно представить в виде двух уравнений первого порядка

$$m\frac{dv_x}{dt} = b_1\cos\omega t,$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x. \qquad (8)$$

В первом уравнении связаны две переменные величины: проекция скорости на ось x и время. Разделяя переменные, получим

$$mdv_x = b_1\cos\omega t dt.$$

Слева и справа от знака равенства стоят дифференциалы некоторых функций. Если дифференциалы равны, то и интегралы равны с точностью до постоянной интегрирования

$$\int m dv_x = \int b_1 \cos \omega t dt + C_1$$

После интегрирования получим

$$v_x = \frac{b_1}{m\omega} \sin \omega t + C_1, \qquad (9)$$

т.е. зависимость проекции скорости точки на ось x от времени. Из второго уравнения системы (8) получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b_1}{m\omega} \sin \omega t + C_1.$$

Снова разделяя переменные, получим

$$dx = (\frac{b_1}{m\omega} \sin \omega t + C_1) dt.$$

После интегрирования получим

$$x = -\frac{b_1}{m\omega^2} \cos \omega t + C_1 t + C_2. \qquad (10)$$

Постоянные C_1 и C_2 определим по начальным условиям. Подставляя в выражение (10) значение координаты x при $t = 0$, получаем

$$0 = -\frac{b_1}{m\omega^2} \cos \omega 0 + C_1 0 + C_2,$$

отсюда

$$C_2 = \frac{b_1}{m\omega^2}.$$

Постоянную C_1 определим, подставляя в (9) значение v_x при $t = 0$:

$$0 = \frac{b_1}{m\omega} \sin \omega 0 + C_1,$$

отсюда $C_1 = 0$.

Таким образом, решение первого уравнения системы (7) имеет вид

$$x = -\frac{b_1}{m\omega^2} \cos \omega t + \frac{b_1}{m\omega^2}. \qquad (11)$$

Второе уравнение системы (7) также представляем в виде двух уравнений

$$m\frac{dv_y}{dt}=b_2v_y$$
$$\frac{dy}{dt}=v_y \qquad (12)$$

Разделяя переменные в первом уравнении, получим

$$m\frac{dv_y}{v_y}=b_2dt \quad \text{или} \quad \ln v_y=\frac{b_2}{m}t+\ln C_3 .$$

Решая относительно v_y, получим

$$v_y=C_3e^{\frac{b_2t}{m}} . \qquad (13)$$

Учитывая второе уравнение системы (12) снова получаем

$$\frac{dy}{dt}=C_3e^{\frac{b_2t}{m}} .$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$y=C_3\frac{m}{b_2}e^{\frac{b_2t}{m}}+C_4 . \qquad (14)$$

Постоянные C_3 и C_4 определяем по начальным условиям.

Из (13) $v_{y0}=C_3e^{\frac{b_2 0}{m}}=C_3$, из (14) $0=v_{y0}\frac{m}{b_2}e^{\frac{b_2}{m}0}+C_4$, или $C_4=-v_{y0}\frac{m}{b_2}$.

Таким образом, решение второго уравнения системы (7) имеет вид

$$y=v_{y0}\frac{m}{b_2}e^{\frac{b_2}{m}t}-v_{y0}\frac{m}{b_2} . \qquad (15)$$

Третье уравнение системы (7) также представляем в виде двух уравнений

$$m\frac{dv_z}{dt} = b_3 z$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \qquad (16)$$

В первом уравнении системы (16), связаны три переменных величины: скорость, время и координата точки. Чтобы разделить переменные необходимо исключить одну из них. Произведем замену

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{dv_z}{dz}\frac{dz}{dt} = v_z\frac{dv_z}{dz}.$$

Тогда первое уравнение (16) примет вид

$$mv_z\frac{dv_z}{dz} = b_3 z.$$

Теперь можно разделить переменные

$$mv_z dv_z = b_3 z dz.$$

Интегрируя, получим $\frac{mv_z^2}{2} = 4\frac{z^2}{2} + C_5$.

Решая относительно v_z, получим

$$v_z = \sqrt{\frac{b_3 z^2}{m} + 2\frac{C_5}{m}}. \qquad (17)$$

По начальным условиям найдем постоянную C_5.

Подставляя в (17) $v_{z0} = 0$ и z_0, получим

$$0 = \sqrt{\frac{b_3 z_0^2}{m} + 2\frac{C_5}{m}}, \text{ и } C_5 = -\frac{b_3}{2}z_0^2.$$

Учитывая, что $v_z = \frac{dz}{dt}$ выражение (17) запишется в виде

$$\frac{dz}{dt}=\sqrt{\frac{b_3 z^2}{m}-\frac{b_3 z_0^2}{m}}.$$

Разделив переменные, приведем его к виду

$$\frac{dz}{\sqrt{\frac{b_3 z^2}{m}-\frac{b_3 z_0^2}{m}}}=dt.$$

Вынося из под знака корня в знаменателе $\frac{b_3}{m}$, получим

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-z_0^2}}=\int \frac{\sqrt{b_3}}{\sqrt{m}}dt.$$

Интегрируя, получим

$$arcch\frac{z}{z_0}=\frac{\sqrt{b_3}}{\sqrt{m}}t+C_6.$$

Решая относительно z, получим

$$z=z_0\frac{e^{\sqrt{\frac{b_3}{m}}t+C_6}+e^{-\sqrt{\frac{b_3}{m}}t-C_6}}{2}.$$

Постоянную C_6 найдем по начальным условиям. При $t=0,\ z_0\neq 0$.

Отсюда $z_0=z_0\frac{e^{C_6}+e^{-C_6}}{2}$ или $e^{C_6}+\frac{1}{e^{C_6}}=2$.

Решая относительно C_6, получим $e^{C_6}=1$ или $C_6=0$.

Таким образом, решение третьего уравнения системы (7) будет иметь вид

$$z=z_0\frac{e^{\frac{2}{\sqrt{m}}t}+e^{-\frac{2}{\sqrt{m}}t}}{2}.$$

Окончательно уравнения движения точки в координатной форме имеют вид:

$$x = -\frac{b_1}{m\omega^2}\cos\omega t + \frac{b_1}{m\omega^2},$$

$$y = v_{y0}\frac{m}{b_2}e^{\frac{b_2}{m}t} - v_{y0}\frac{m}{b_2},$$

$$z = z_0\frac{e^{\sqrt{\frac{b_3}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{b_3}{m}}t}}{2}.$$

1.2 ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Материальная точка массой m, движется под действием сил, равнодействующая которых зависит от времени, координат точки и ее скорости. Определить уравнения движения точки в координатной форме при заданных начальных условиях. Исходные данные приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

№ вар.	$\bar{F}$	x_0	y_0	z_0	v_{x0}	v_{y0}	v_{z0}	m
1	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	$\bar{F} = \bar{i}5t + \bar{j}3v_y + \bar{k}z$	3	2	1	5	3	2	1
2	$\bar{F} = \bar{i}5\sin 3t + \bar{j}3y - \bar{k}v_z$	3	2	2	1/6	0	1	2
3	$\bar{F} = \bar{i}4x + \bar{j}3v_y + \bar{k}\cos 4t$	1	1	1	0	3/4	1	4
4	$\bar{F} = \bar{i}5v_x + \bar{j}3y + \bar{k}3t$	3	1	1	5	1	3	3
5	$\bar{F} = \bar{i}4x + \bar{j}4v_y^2 + \bar{k}\sin 3t$	4	2	1	√2	0,5	-1/6	2
6	$\bar{F} = \bar{i}5\cos 3t + \bar{j}3/v_z - \bar{k}2$	8/9	5/9	1	1	1	1	5
7	$\bar{F} = -\bar{i}3x + \bar{j}3v_y + \bar{k}1/(1+t)^2$	1	1	1	1	1	-1/3	3
8	$\bar{F} = \bar{i}3x + \bar{j}3\cos t - \bar{k}v_z$	2	-1	3	2	2	3	3
9	$\bar{F} = \bar{i}2t^2 - \bar{j}3y + \bar{k}v_z$	1	1	1	1	√3	1/2	2
10	$\bar{F} = \bar{i}5t^2 - \bar{j}3v_y - \bar{k}4z$	1	1	1	2	3	2	5

1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	$\bar{F} = \bar{i}3v_x + \bar{j}y + \bar{k}5t$	2	1	3	3	2	5	1
12	$\bar{F} = \bar{i}3x - \bar{j}v_y + \bar{k}5\sin 3t$	2	2	3	0	1	1/6	2
13	$\bar{F} = \bar{i}3v_x + \bar{j}\cos 4t + \bar{k}4z$	1	1	1	3/4	1	0	4
14	$\bar{F} = \bar{i}3x + \bar{j}3t + \bar{k}5v_z$	1	1	3	1	3	5	3
15	$\bar{F} = \bar{i}4v_x^2 + \bar{j}\sin 3t + \bar{k}4z$	2	1	4	0,5	-1/6	√2	2
16	$\bar{F} = \bar{i}3/v_x - \bar{j}2 + \bar{k}5\cos 3t$	5/9	1	8/9	1	1	1	5
17	$\bar{F} = \bar{i}3v_x + \bar{j}1/(1+t)^2 - \bar{k}3z$	1	1	1	1	-1/3	1	3
18	$\bar{F} = \bar{i}3\cos t - \bar{j}v_y + \bar{k}3z$	-1	3	2	2	3	2	3
19	$\bar{F} = -\bar{i}3x + \bar{j}v_y + \bar{k}2t^2$	1	1	1	√3	1/2	1	2
20	$\bar{F} = -\bar{i}3v_x - \bar{j}4y + \bar{k}5t^2$	1	1	1	3	2	2	5
21	$\bar{F} = \bar{i}x + \bar{j}5t + \bar{k}3v_z$	1	3	2	2	5	3	1
22	$\bar{F} = -\bar{i}v_x + \bar{j}5\sin 3t + \bar{k}3z$	2	3	2	1	1/6	0	2
23	$\bar{F} = \bar{i}\cos 4t + \bar{j}4y + \bar{k}3v_z$	1	1	1	1	0	3/4	4
24	$\bar{F} = \bar{i}3t + \bar{j}5v_y + \bar{k}3z$	1	3	1	3	5	1	3
25	$\bar{F} = \bar{i}\sin 3t + \bar{j}4y + \bar{k}4v_z^2$	1	4	2	-1/6	√2	0,5	2
26	$\bar{F} = -\bar{i}2 + \bar{j}5\cos 3t + \bar{k}3/v_z$	1	8/9	5/9	1	1	1	5
27	$\bar{F} = \bar{i}1/(1+t)^2 - \bar{j}3y + \bar{k}3v_z$	1	1	1	-1/3	1	1	3
28	$\bar{F} = -\bar{i}v_x + \bar{j}3y + \bar{k}3\cos t$	3	2	-1	3	2	2	3
29	$\bar{F} = \bar{i}v_x + \bar{j}2t^2 - \bar{k}3z$	1	1	1	1/2	1	√3	2
30	$\bar{F} = -\bar{i}4x + \bar{j}5t^2 - \bar{k}3v_z$	1	1	1	2	2	3	5

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1 Какой вид имеют дифференциальные уравнения движения точки в декартовых осях координат?

2 Какой вид имеют дифференциальные уравнения движения точки в естественных осях координат?

3 Что означает «разделить переменные в дифференциальном уравнении»?

5 Почему при интегрировании уравнений движения появляются неопределенные постоянные интегрирования?

6 Для чего задаются начальные условия движения?

2 ЗАДАЧА Д2
ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ К ИЗУЧЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: механическая система, состоящая из тела 1, блоков 2 и 3, тонкого однородного стержня 4 и однородного сплошного цилиндра 5, под действием силы тяжести тела 1 приходит в движение из состояния покоя (рисунок 2.1). Известны:

$\boldsymbol{m}_1$ – масса груза 1, $\boldsymbol{m}_2 = 2\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_3 = \boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_4 = 0{,}5\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_5 = 20\boldsymbol{m}_1$,

$\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}_3 = 12$ см, $\boldsymbol{r}_2 = 0{,}5\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{r}_3 = 0{,}75\boldsymbol{R}_3$, $\boldsymbol{R}_5 = 20$ см,

$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{l} = 4\boldsymbol{R}_3$, $\boldsymbol{i}_{2\xi} = 8$ см, $\boldsymbol{i}_{3x} = 10$ см, $\boldsymbol{\alpha} = 30°$, $\boldsymbol{f} = 0{,}1$, $\boldsymbol{\delta} = 0{,}2$ см, $\boldsymbol{s} = 0{,}06\boldsymbol{\pi}$ м.

Сопротивление качению тела 2 не учитывать. Массами звена $\boldsymbol{BC}_5$ и ползуна $\boldsymbol{B}$ пренебречь. На рисунке 2.1, а показана механическая система в начальном положении.

Найти: $\boldsymbol{v}_1$ – скорость груза 1 в конечном положении.

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}_0 = \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{e}} + \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{i}}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{T}_0$ и $\boldsymbol{T}$ – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; $\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{e}}$ – сумма работ внешних сил, приложенных к системе, на перемещении системы из начального положения в конечное; $\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{i}}$ – сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении.

Для рассматриваемых систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями и стержнями, $\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{i}} = 0$.

Так как в начальном положении система находится в покое, то $\boldsymbol{T}_0 = 0$.

Следовательно, уравнение (1) принимает вид

$$\boldsymbol{T} = \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{e}}. \qquad (2)$$

Для определения кинетической энергии $\boldsymbol{T}$ и суммы работ внешних сил изобразим систему в конечном положении (рисунок 2.1, б, в).

Напишем кинематические соотношения между скоростями и перемещениями точек системы, т.е. уравнения связей, при этом скорости и перемещения выразим соответственно через скорости и перемещения груза 1.

Скорость центра масс $\boldsymbol{C}$ катка 2 равна скорости груза 1:

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{C}2} = \boldsymbol{v}_1. \qquad (1.3)$$

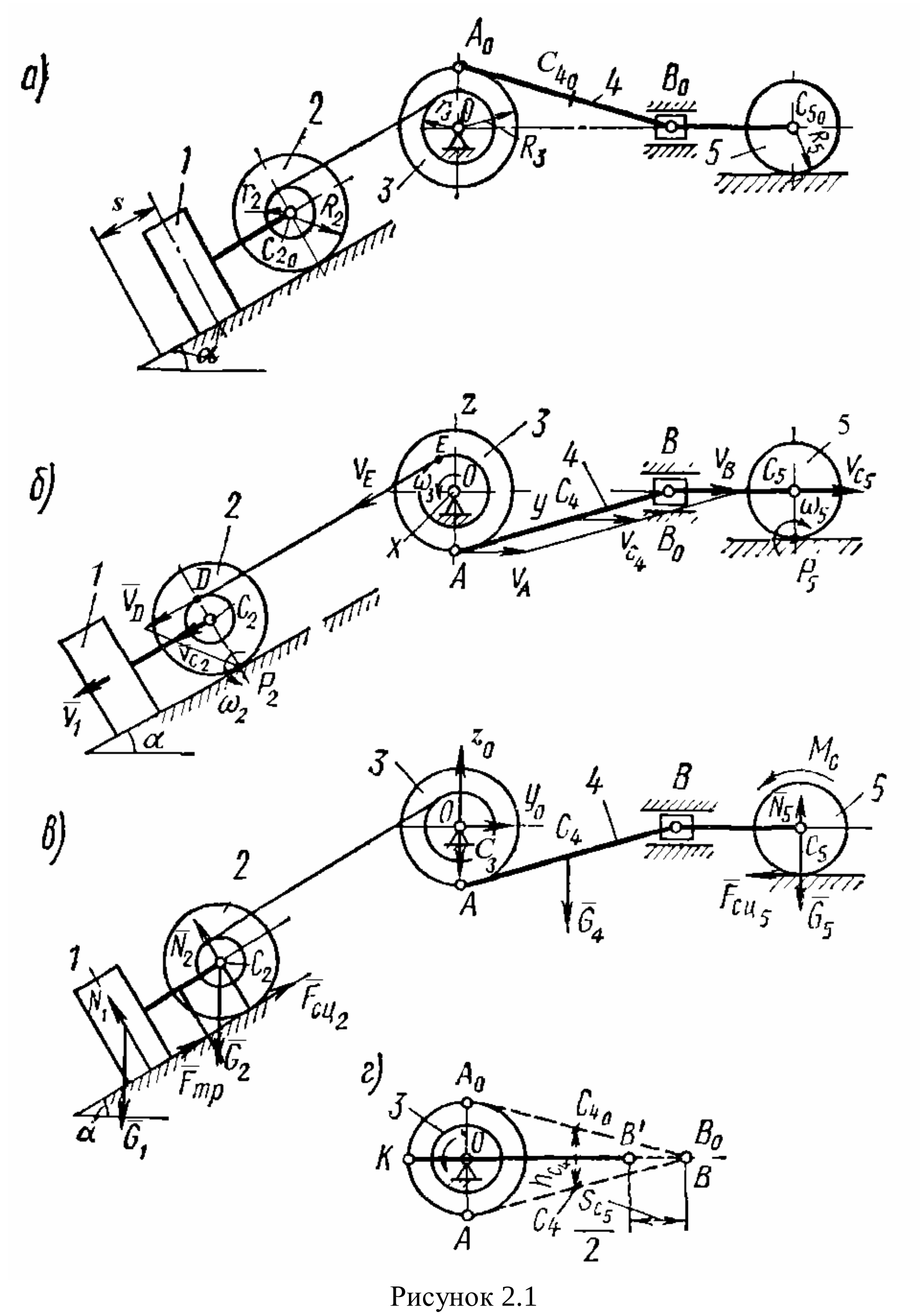


Рисунок 2.1

Угловая скорость катка 2, мгновенный центр скоростей которого находится в точке $\boldsymbol{P}_2$,

$$\omega_2 = \frac{v_{C2}}{C_2P_2} \text{ или } \omega_2 = \frac{v_1}{R_2}. \qquad (4)$$

Скорость точки $\boldsymbol{D}$ катка 2 $v_D = \omega_2 \cdot DP_2$, т.е. $v_D = \frac{v_1}{R_2}(R_2 + r_2)$.

Скорость точки $\boldsymbol{E}$ блока 3 равна скорости точки $\boldsymbol{D}$ катка 2:

$$v_E = v_D. \qquad (5)$$

Но $\boldsymbol{v_E} = \boldsymbol{\omega}_3\boldsymbol{r}_3$. Следовательно, по (5), $\boldsymbol{\omega}_3\boldsymbol{r}_3 = \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{R}_2}(\boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{r}_2)$.

Так как $\boldsymbol{R}_2 = 2\boldsymbol{r}_2$, то $\boldsymbol{\omega}_3\boldsymbol{r}_3 = \dfrac{3}{2}\boldsymbol{v}_1$, откуда

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{r}_3}. \tag{6}$$

Заменяя в формуле (6) $\boldsymbol{\omega}_3 = \dfrac{\boldsymbol{d\varphi}_3}{\boldsymbol{dt}}$, $\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{\boldsymbol{ds}}{\boldsymbol{dt}}$, получим

$$\frac{\boldsymbol{d\varphi}_3}{\boldsymbol{dt}} = \frac{3}{2\boldsymbol{r}_3}\frac{\boldsymbol{ds}}{\boldsymbol{dt}}, \text{ или } \boldsymbol{d\varphi}_3 = \frac{3}{2\boldsymbol{r}_3}\boldsymbol{ds}.$$

После интегрирования (при нулевых начальных условиях)

$$\boldsymbol{\varphi}_3 = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{r}_3}.$$

Когда груз 1 пройдет путь $\boldsymbol{s} = 0{,}06\boldsymbol{\pi}$ м, блок 3 повернется на угол $\boldsymbol{\varphi}_3$:

$$\boldsymbol{\varphi}_3 = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{r}_3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{0{,}06\boldsymbol{\pi}}{0{,}09} = \boldsymbol{\pi}. \tag{7}$$

При этом повороте блока 3 на 180? его точка $\boldsymbol{A}_0$ перейдет в конечное положение $\boldsymbol{A}$ и шатун 4 из начального положения $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0$ перейдет в конечное положение $\boldsymbol{AB}$.

Каток 5 переместится влево при повороте блока 3 на угол $\boldsymbol{\pi}/2$ и вправо при повороте блока еще на $\boldsymbol{\pi}/2$; значит, конечное положение катка 5 совпадает с его начальным положением.

Таким образом, конечное положение всей системы вполне определено (рисунок 2.1, б).

Вычислим кинетическую энергию системы в конечном положении как сумму кинетических энергий тел 1, 2, 3, 4, 5:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2 + \boldsymbol{T}_3 + \boldsymbol{T}_4 + \boldsymbol{T}_5. \tag{8}$$

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно,

$$\boldsymbol{T}_1 = \frac{\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{v}_1^2}{2}. \tag{9}$$

Кинетическая энергия катка 2, совершающего плоское движение,

$$\boldsymbol{T}_2 = \frac{\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{v}_{C2}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{J}_{2\xi}\boldsymbol{\omega}_2^2}{2}, \tag{10}$$

где $J_{2\xi}$ - момент инерции катка 2 относительно его продольной центральной оси $C_{2\xi}$:

$$J_{2\xi}=m_2 i_{2\xi}^2. \qquad (11)$$

Подставляя (3), (4), (11) в формулу (10), получаем

$$T_2=\frac{m_2 v_1^2}{2}+\frac{m_2 i_{2\xi}^2}{2R_2^2}v_1^2=\frac{1}{2}m_2\left(1+\frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right)v_1^2. \qquad (12)$$

Кинетическая энергия тела 3, вращающегося вокруг оси Ox,

$$T_3=\frac{J_{3x}\omega_3^2}{2}, \qquad (13)$$

где J_{3x} - момент инерции блока 3 относительно оси Ox:

$$J_{3x}=m_3 i_{3x}^2. \qquad (14)$$

Подставляя (6), (14) в формулу (13), получаем

$$T_3=\frac{m_3 i_{3x}^2}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{v_1}{r_3}\right)^2=\frac{9}{8}m_3\frac{i_{3x}^2}{r_3^2}v_1^2. \qquad (15)$$

Кинетическая энергия шатуна 4, совершающего плоское движение,

$$T_4=\frac{m_4 v_{C4}^2}{2}+\frac{J_{4\xi}\omega_4^2}{2},$$

где v_{C4} - скорость центра масс C_4 шатуна 4; ω_4 - угловая скорость шатуна 4; $J_{4\xi}$ - момент инерции шатуна относительно центральной оси $C_{4\xi}$.

Для определения v_{C4} и ω_4 найдем положение мгновенного центра скоростей шатуна 4. Так как скорости точек A и B в этот момент параллельны, то мгновенный центр скоростей шатуна 4 находится в бесконечности; следовательно, угловая скорость шатуна в данный момент $\omega_4=0$, а скорости всех его точек параллельны и равны между собой. Таким образом, кинетическая энергия шатуна 4

$$T_4=\frac{m_4 v_{C4}^2}{2}, \qquad (16)$$

где

$$v_{C4}=v_A. \qquad (17)$$

Вращательная скорость точки A тела 3

$$\boldsymbol{v_A} = \omega_3 \boldsymbol{R}_3, \tag{18}$$

или с учетом (14)

$$\boldsymbol{v_A} = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{R}_3 \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{r}_3}.$$

Поскольку $\boldsymbol{r}_3 = \dfrac{3}{4}\boldsymbol{R}_3$, получим $\boldsymbol{v_A} = 2\boldsymbol{v}_1$.

По (17)

$$\boldsymbol{v_{C4}} = \boldsymbol{v_A},\ \boldsymbol{v_{C4}} = 2\boldsymbol{v}_1. \tag{19}$$

После подстановки (19) в (16) выражение кинетической энергии шатуна 4 принимает вид

$$\boldsymbol{T}_4 = \frac{\boldsymbol{m}_4 (2\boldsymbol{v}_1)^2}{2} = 2\boldsymbol{m}_4 \boldsymbol{v}_1^2. \tag{20}$$

Кинетическая энергия катка 5, совершающего плоское движение,

$$\boldsymbol{T}_5 = \frac{\boldsymbol{m}_5 \boldsymbol{v}_{C5}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{J}_{5\xi} \boldsymbol{\omega}_5^2}{2},$$

где $\boldsymbol{v_{C5}}$ - скорость центра масс $\boldsymbol{C}_5$ катка 5; $\boldsymbol{\omega}_5$ - угловая скорость катка 5; $\boldsymbol{J}_{5\xi}$ - момент инерции катка 5 (однородного сплошного цилиндра) относительно его центральной оси $\boldsymbol{C}_{5\xi}$, $\boldsymbol{J}_{5\xi} = \boldsymbol{m}_5 \boldsymbol{R}_5^2 / 2$.

Так как каток катится без скольжения, то мгновенный центр скоростей находится в точке $\boldsymbol{P}_5$. Поэтому $\boldsymbol{\omega}_5 = \boldsymbol{v_{C5}} / \boldsymbol{R}_5$.

Следовательно,

$$\boldsymbol{T}_5 = \frac{\boldsymbol{m}_5 \boldsymbol{v}_{C5}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{m}_5 \boldsymbol{R}_5^2 \boldsymbol{v}_{C5}^2}{2 \cdot 2\boldsymbol{R}_5^2} = \frac{3}{4}\boldsymbol{m}_5 \boldsymbol{v}_{C5}^2.$$

Так как звено $\boldsymbol{BC}_5$ совершает поступательное движение, то $\boldsymbol{v_{C5}} = \boldsymbol{v_B}$, но $\boldsymbol{v_B} = \boldsymbol{v_{C4}} = 2\boldsymbol{v}_1$. Значит $\boldsymbol{v_{C5}} = 2\boldsymbol{v}_1$.

Поэтому выражение кинетической энергии катка 5 принимает вид

$$\boldsymbol{T}_5 = \frac{3}{4}\boldsymbol{m}_5 (2\boldsymbol{v}_1)^2 = 3\boldsymbol{m}_5 \boldsymbol{v}_1^2. \tag{21}$$

Кинетическая энергия всей механической системы определяется по формуле (8) с учетом (9), (12), (15), (20) и (21):

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{m}_1 \boldsymbol{v}_1^2}{2} + \boldsymbol{m}_2 \left(1 + \frac{\boldsymbol{i}_{2\xi}^2}{\boldsymbol{R}_2^2}\right)\frac{\boldsymbol{v}_1^2}{2} + \frac{9}{8}\frac{\boldsymbol{m}_3 \boldsymbol{v}_1^2 \boldsymbol{i}_{3x}^2}{\boldsymbol{r}_3^2} + 2\boldsymbol{m}_4 \boldsymbol{v}_1^2 + 3\boldsymbol{m}_5 \boldsymbol{v}_1^2.$$

Подставляя сюда заданные значения масс, получаем

$$T = m_1 v_1^2 [1 + 2(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}) + \frac{9}{4}\frac{i_{3x}^2}{r_3^2} + 2 + 120]/2, \qquad \text{или} \quad T = 129 m_1 v_1^2 / 2. \quad (22)$$

Найдем сумму работ всех внешних сил, приложенных к системе, на заданном ее перемещении (внешние силы, приложенные к системе, показаны на рисунке 2.1, в).

Работа силы тяжести $\overline{G}_1$

$$A_{G1} = G_1 h = m_1 g s \sin\alpha. \qquad (23)$$

Работа силы трения скольжения $\overline{F}_{тр}$

$$A_{Fтр} = -F_{тр} s.$$

Так как $F_{тр} = fN_1 = fG_1 \cos\alpha$, то

$$A_{Fтр} = -f\, m_1 g\, s \cos\alpha. \qquad (24)$$

Работа силы тяжести $\overline{G}_2$

$$A_{G2} = G_2 h_{C2} = m_2 g s \sin\alpha. \qquad (25)$$

Работа сил сцепления $\overline{F}_{сц2}$, $\overline{F}_{сц5}$ катков 2 и 5 равна нулю, т.к. эти силы приложены в мгновенных центрах скоростей этих катков.

Работа силы тяжести $\overline{G}_4$

$$A_{G4} = G_4 h_{C4}, \qquad (25)$$

где h_{C4} - вертикальное перемещение центра тяжести C_4 шатуна 4 из начального положения в его конечное положение (рисунок 1.1, г), $h_{C4} = R_3$:

$$A_{G4} = m_4 g R_3. \qquad (26)$$

Работа пары сил сопротивления качению катка 5

$$A_{M_c} = -M_c \varphi_5, \qquad (27)$$

где $M_c = \delta N_5 = \delta G_5$ - момент сопротивления качению катка 5; φ_5 - угол поворота катка 5.

Так как каток 5 катится без скольжения, то угол его поворота

$$\varphi_5 = s_{C5} / R_5, \qquad (28)$$

где s_{C5} - перемещение центра тяжести C_5 катка 5.

В данном примере работу пары сил сопротивления вычислим как сумму работ этой пары при качении катка 5 влево при повороте тела 3 на угол $\pi/2$ и качении вправо, когда тело 3 повернется еще на угол $\pi/2$. Перемещение центра тяжести C_5 катка 5 равно перемещению ползуна B влево и право:

$$s_{C5} = 2(B_0 B'). \qquad (29)$$

Определим перемещение B_0B' при повороте тела 3 на угол $\pi/2$. За начало отсчета координаты точки B выберем неподвижную точку K плоскости (рисунок 2.1, г). При этом повороте тела 3 шатун из положения A_0B_0 перейдет в положение KB'. Тогда $B_0B' = KB_0 - KB'$, где

$$KB_0 = KO + OB_0 = R_3 + \sqrt{(A_0B_0)^2 - (A_0O)^2} = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2},$$
$$KB' = l = 4R_3.$$

Следовательно,

$$B_0B' = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2} - l = R_3 + \sqrt{(4R_3)^2 - R_3^2} - 4R_3 = 0{,}88R_3. \qquad (30)$$

Подставляя (30) и (29), а затем в (28), находим полный угол поворота катка 5:

$$\varphi_5 = 1{,}76R_3 / R_5. \qquad (31)$$

Работа момента сопротивления качению по (27)

$$A_{M_c} = -\delta m_5 g \cdot 1{,}76R_3 / R_5. \qquad (32)$$

Сумма работ внешних сил определится сложением работ, вычисляемых по формулам (23) – (26) и (32):

$$\sum A_k^e = m_1 gs\left(\sin\alpha - f\cos\alpha + 2\sin\alpha + \frac{R_3}{2s} - \frac{\delta \cdot 20 \cdot 1{,}76R_3}{R_5 s}\right), \text{ или}$$

$$\sum A_k^e = 1{,}51m_1 gs. \qquad (33)$$

Согласно теореме (2), приравняем значения T и $\sum A_k^e$, определяемые по формулам (22) и (33):

$$129 \cdot m_1 v_1^2 / 2 = 1{,}51m_1 gs, \text{ откуда } v_1 = 0{,}21 \text{ м/с}.$$

2.2 ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

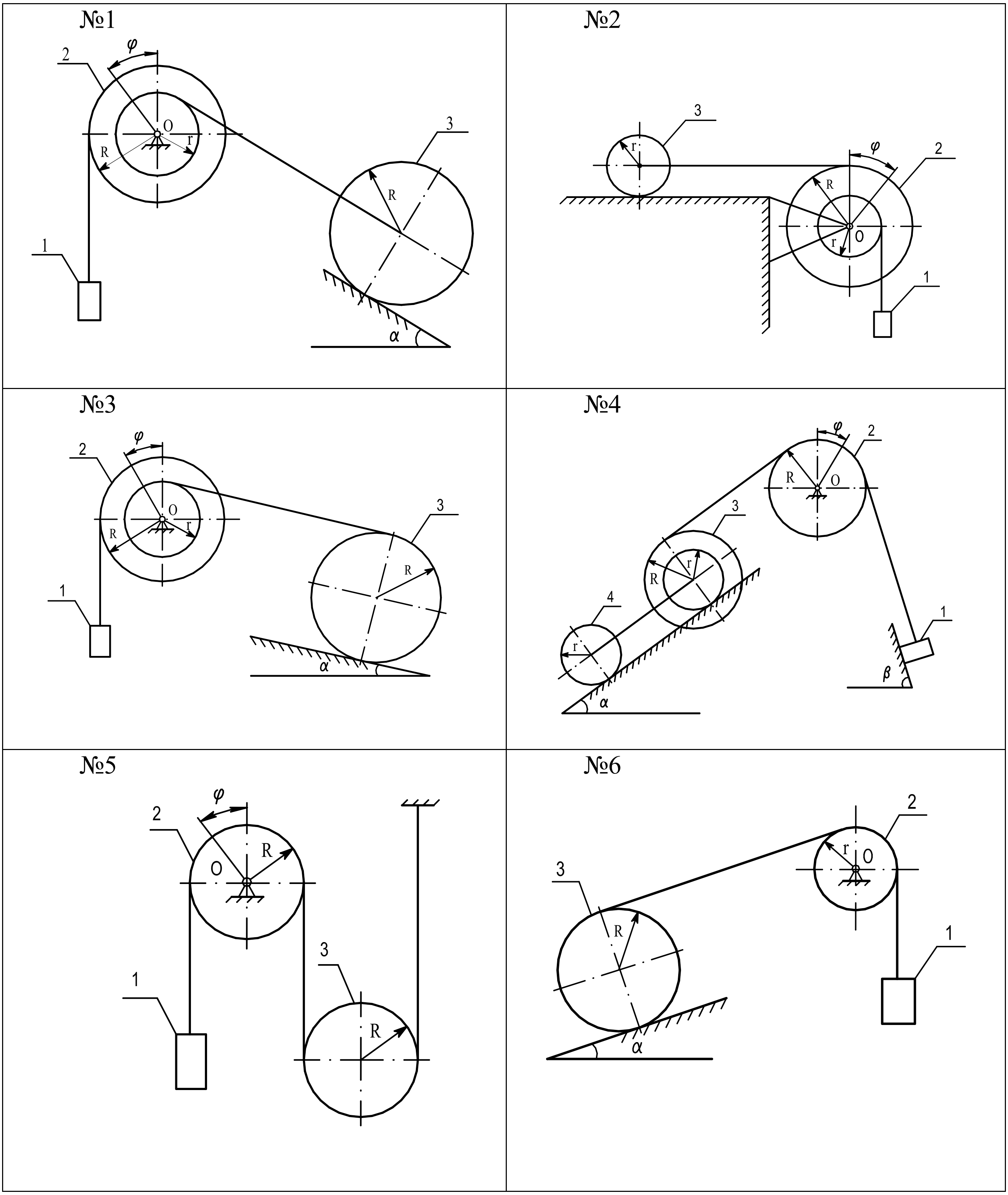
Механическая система под действием силы тяжести тела 1 (варианты 1-11, 14-16, 20, 23, 24, 30) или тела 4 (вариант 17), или тела 3 (вариант 28), или вращающего момента M (варианты 12, 13, 18, 19, 21, 22, 25, 26, 27, 29) приходит в движение из состояния покоя (рисунки 2.2-2.6).

Учитывая трение скольжения тела 1 (варианты 4, 19, 12, 13, 18, 19, 21-23, 25-30) и сопротивление качению тела 3, катящегося без скольжения (варианты 1-4, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 22, 23, 26, 30), определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным s_1.

Необходимые для выполнения контрольной работы данные приведены в таблице 2.1. Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Таблица 2.1

№ вар.	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	s_1, м	M, Н·м	R, м	r/R	i_2; i_3, м	δ, м	f	α, ?	β, ?
1	$2m$	$1{,}5m$	m	-	1,2	-	0,2	0,8	0,16	0,005	-	45	-
2	m	$4m$	$2m$	-	1,0	-	0,3	0,5	0,2	0,01	-	-	-
3	$1{,}5m$	$3m$	$2m$	-	0,8	-	0,4	0,4	0,24	0,005	-	30	-
4	$4m$	$2m$	$2m$	m	1,0	-	0,3	0,5	0,28	0,005	0,1	30	60
5	$3m$	$3m$	$3m$	-	0,5	-	-	-	-	-	-	-	-
6	$2m$	m	$4m$	-	1,2	-	0,2	-	-	0,002	-	45	-
7	m	$4m$	$1{,}5m$	-	2,0	-	0,4	0,4	0,3	0,001	-	-	-
8	$1{,}5m$	$2m$	$3m$	$1{,}5m$	0,8	-	0,3	0,6	0,22	0,002	-	60	-
9	$4m$	$3m$	$2m$	$1{,}5m$	1,2	-	0,2	0,5	0,15	0,001	0,1	30	60
10	m	$1{,}5m$	$2m$	-	1,0	-	0,24	0,4	0,16	0,005	0,08	45	-
11	$2m$	$4m$	$3m$	$1{,}5m$	0,8	-	0,32	0,8	0,3	0,002	-	30	-
12	m	$1{,}5m$	$3m$	-	0,5	40	0,4	0,5	-	0,001	0,1	45	-
13	m	$2m$	m	$2m$	1,6	25	0,3	0,6	-	0,005	0,08	30	-
14	$3m$	$4m$	$2m$	-	1,4	-	0,6	0,4	-	0,002	-	60	-
15	$4m$	$3m$	m	$0{,}5m$	0,75	-	0,1	0,75	-	0,001	-	30	-
16	$0{,}5m$	m	m	-	1,0	-	0,15	-	-	0,005	-	45	-
17	m	$2m$	$1{,}5m$	$1{,}5m$	1,2	-	0,2	-	-	0,01	-	-	-
18	$3m$	$4m$	$3m$	-	0,8	30	0,4	0,5	0,3	0,005	0,08	60	30
19	m	$4m$	$3m$	-	1,4	35	0,3	0,6	0,22	0,004	0,1	30	60
20	$1{,}5m$	$2m$	m	-	1,0	-	0,2	-	-	0,006	-	45	-
21	$2m$	$3m$	m	-	1,4	40	0,36	0,8	0,3	-	0,15	60	-
22	$1{,}5m$	$4m$	$4m$	-	0,6	60	0,4	-	-	0,005	0,06	45	-
23	$2m$	m	$1{,}5m$	-	1,2	-	0,32	-	-	0,004	0,08	60	30
24	m	$2m$	m	$1{,}5m$	0,75	-	0,16	-	-	0,005	-	-	-
25	$2m$	$4m$	$3m$	$2m$	1,4	30	0,3	0,5	0,2	0,003	0,15	30	-
26	$3m$	$4m$	$2m$	-	1,0	35	0,44	0,4	0,32	0,01	0,18	30	60
27	m	$1{,}5m$	$2m$	$4m$	1,2	10	0,4	0,6	-	0,004	0,20	60	30
28	$2{,}5m$	m	$0{,}8m$	-	0,6	-	0,32	-	-	-	0,24	-	-
29	$4m$	$2m$	$3m$	-	0,8	20	0,36	-	-	0,005	0,16	60	-
30	$3m$	$4m$	$2m$	-	1,6	-	0,3	0,5	0,2	0,004	0,15	30	60



№1
φ
2
O
r
R
3
R
1
α
№2
3
r
φ
2
R
O
r
1
№3
φ
2
O
R
r
3
R
1
α
№4
φ
2
R
O
3
r
R
4
r
1
β
α
№5
φ
2
O
R
3
R
1
№6
2
r
O
3
R
1
α

Рисунок 2.2

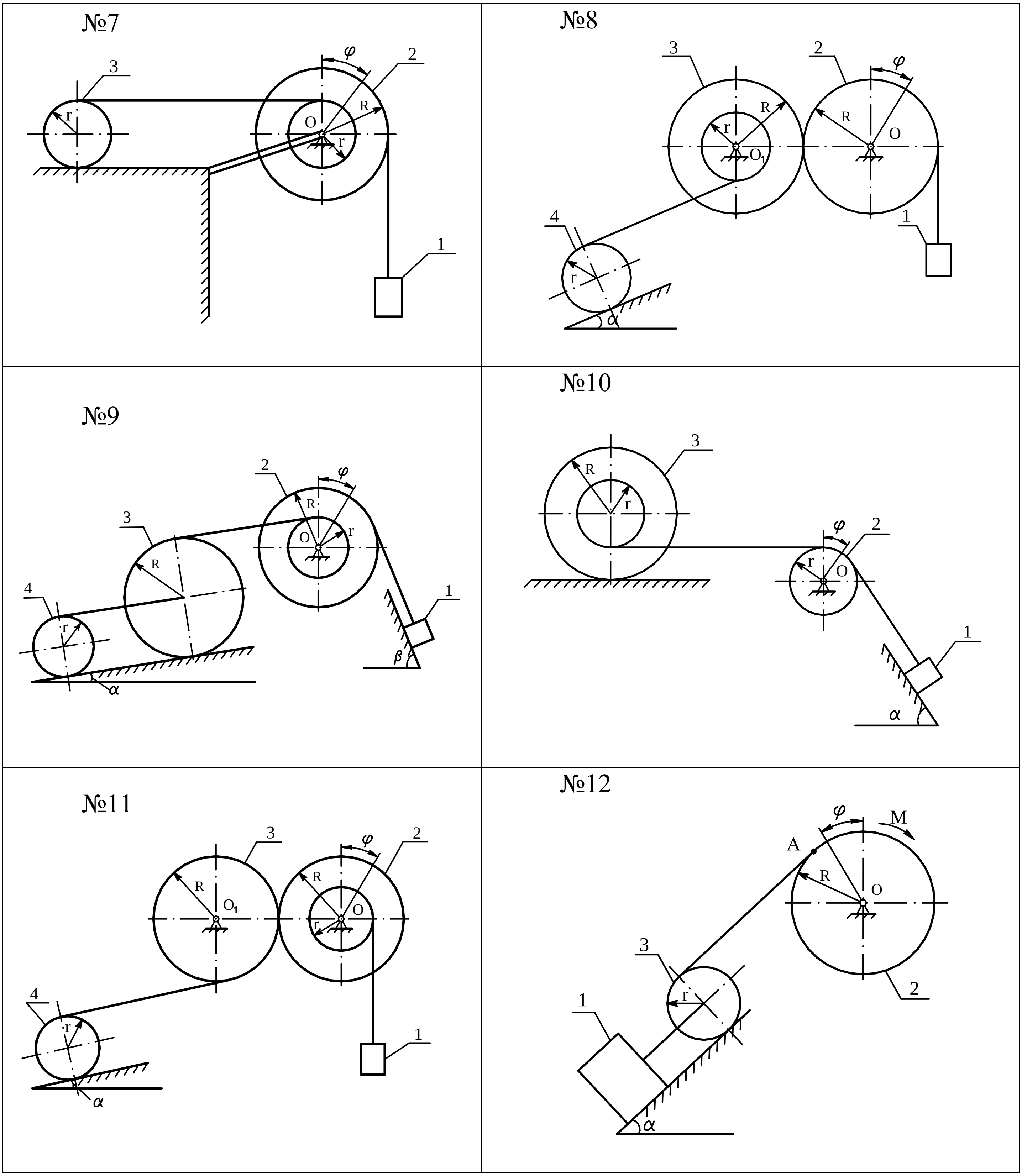
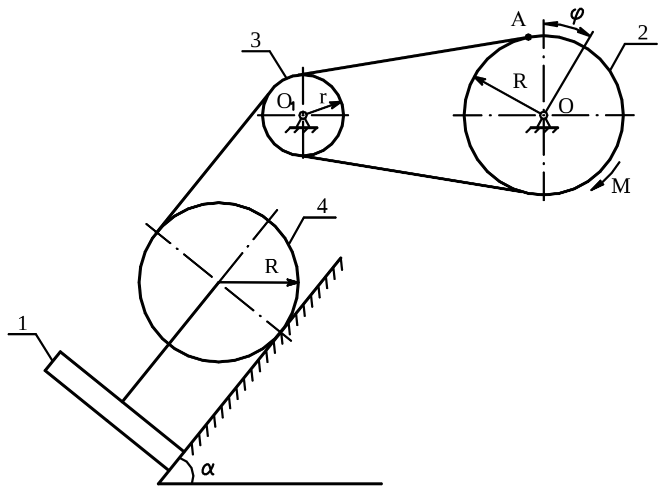
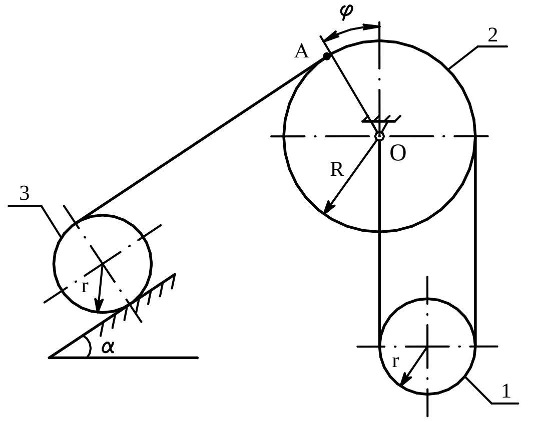

№7
3
r
φ
2
O
R
r
1
№8
3
2
φ
R
R
r
O
O1
4
1
r
α
№9
2
φ
3
R
O
r
R
4
1
r
β
α
№10
3
R
r
φ
2
r
O
1
α
№11
3
2
φ
R
R
O1
O
r
4
r
1
α
№12
φ
M
A
R
O
3
r
1
2
α

Рисунок 2.3

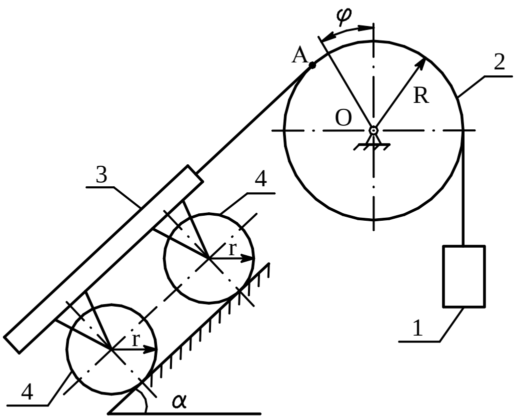
№13



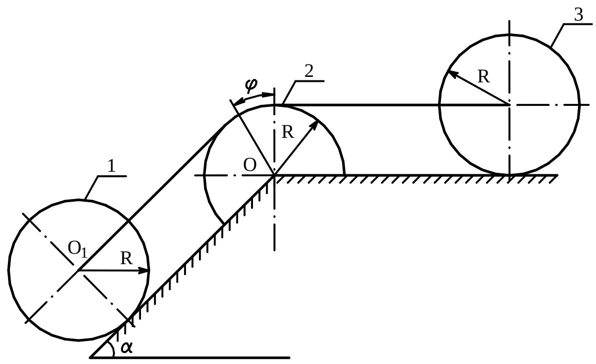
№14



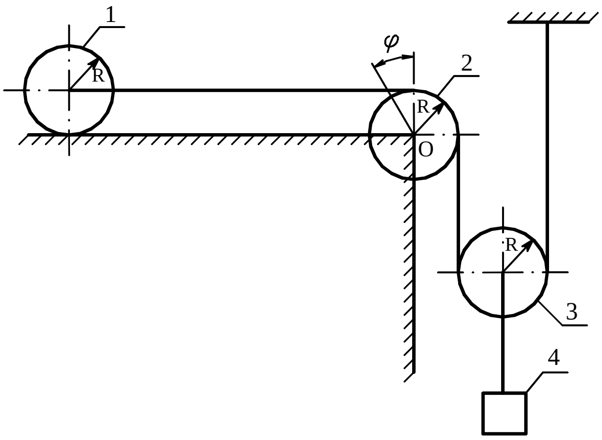
№15



№16



№17



№18

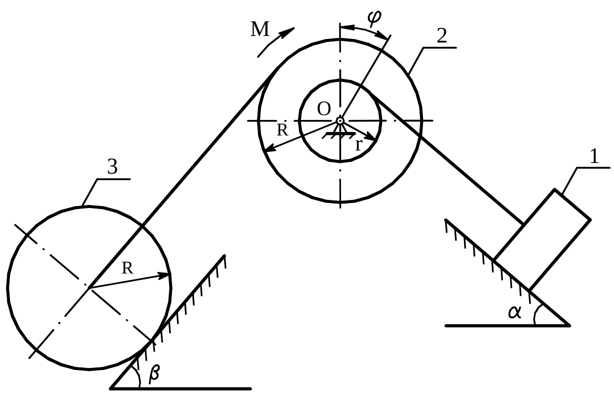
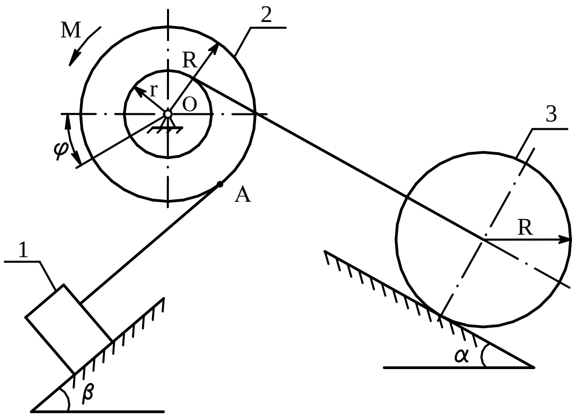
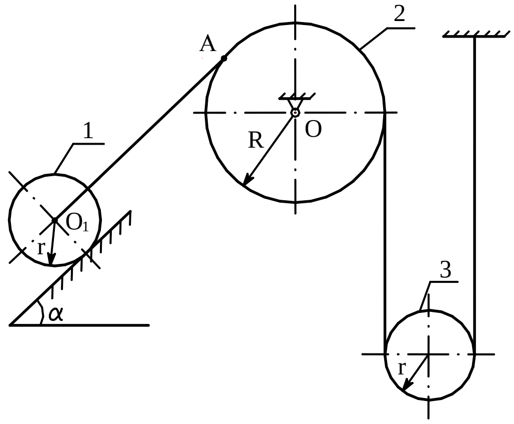


Рисунок 2.4

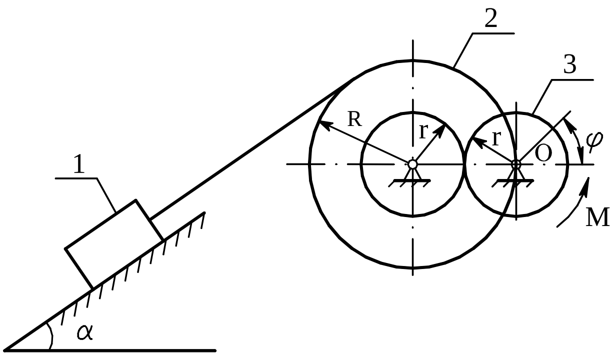
№19



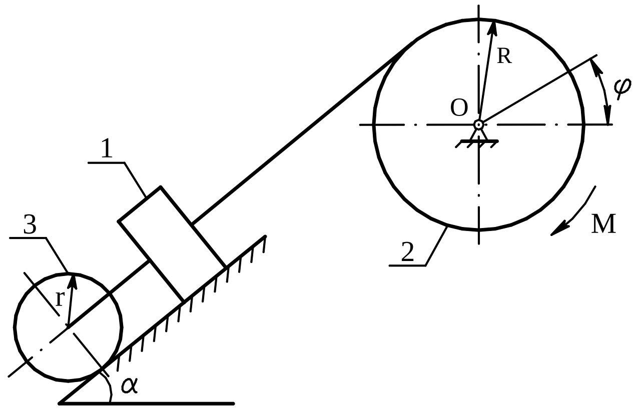
№20



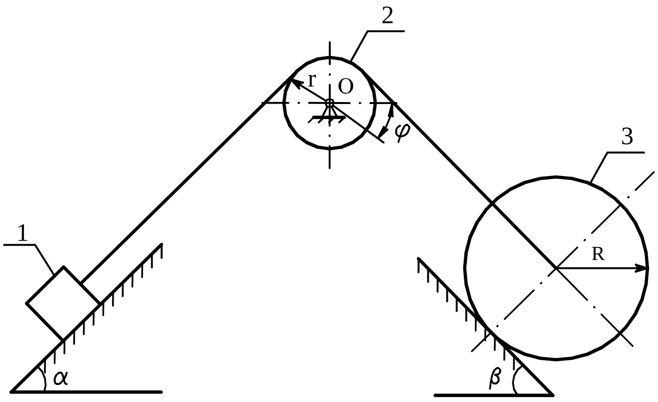
№21



№22



№23



№24

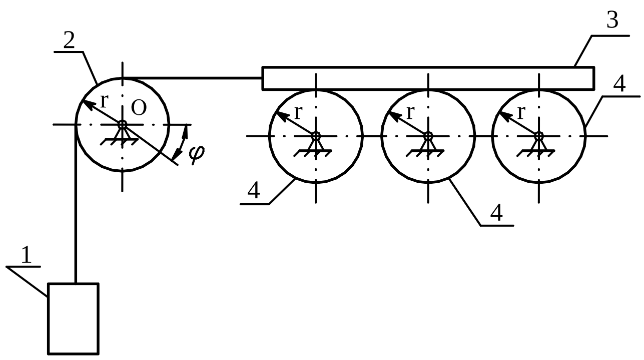
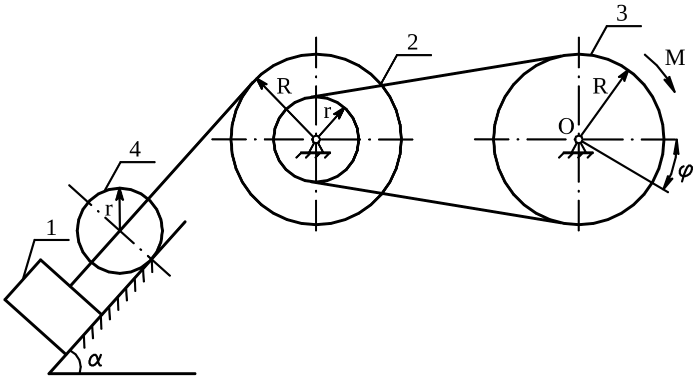
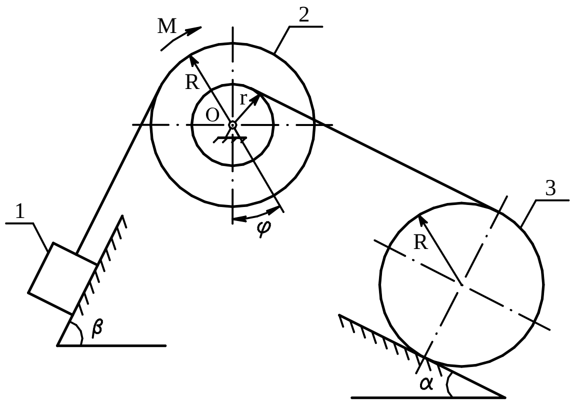


Рисунок 2.5

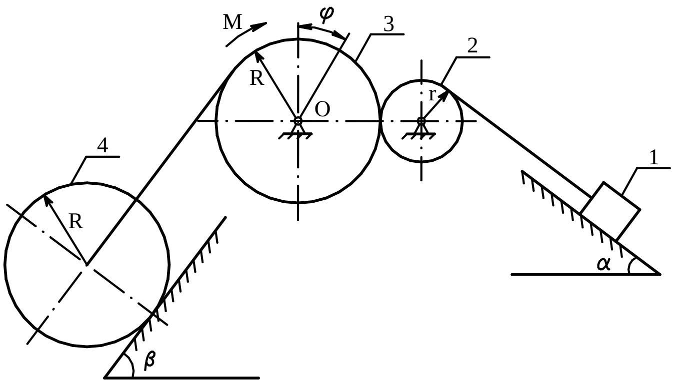
№25



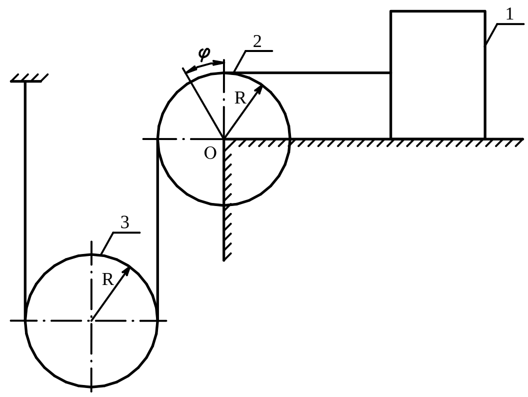
№26



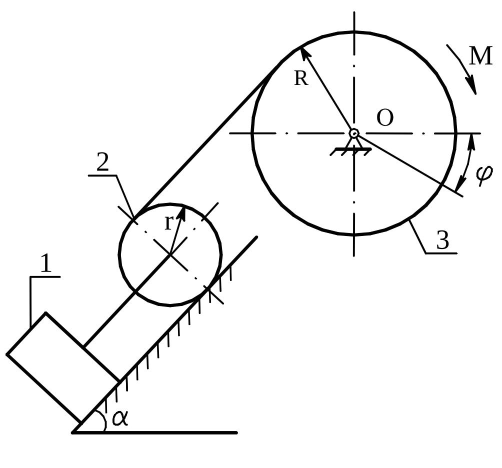
№27



№28



№29



№30

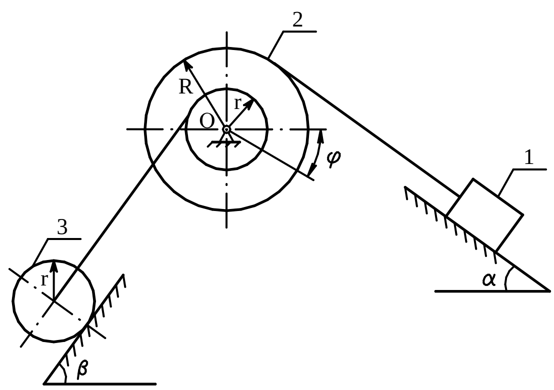


Рисунок 2.6

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1 Как выражается величина элементарной работы силы?

2 Как выражается работа силы на конечном пути?

3 Как выражается элементарная работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, через момент этой силы относительно оси вращения?

4 Что называется кинетической энергией материальной точки?

5 Что называется кинетической энергией механической системы?

6 Как выражается кинетическая энергия твердого тела при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движении этого тела?

7 В чем состоит теорема об изменении кинетической энергии материальной точки?

8 В чем состоит теорема об изменении кинетической энергии механической системы?

9 Входят ли в уравнение, выражающее теорему об изменении кинетической энергии системы, внутренние силы этой системы?

10 В каком случае в уравнение, выражающее теорему об изменении кинетической энергии системы, не входят внутренние силы этой системы?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уфимский государственный нефтяной технический университет
Кафедра «Механика и конструирование машин»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Вариант 5

Студент гр. МЗЗ-07-01 ________________ Р.У. Ганиев
(подпись, дата)

Доцент ________________ М.Х. Аглиуллин
(подпись, дата)

Уфа 2008